

Zur  
**öffentlichen Prüfung**

und zu  
den Versuchen der Schüler im freien Vortrage  
und  
im vierstimmigen Gesange,

welche  
am Donnerstag den 21. März 1872 Vormittag von 8 bis 1 Uhr  
und Nachmittag von 3 bis 5½ Uhr  
in der

**Hala des Königlichen Gymnasiums zu Tilsit**  
gehalten werden sollen,

sowie  
zur Feier des  
Geburstages Sr. Majestät des Kaisers und Königs Wilhelm  
und zur

Entlassung der Abiturienten  
am Freitag den 22. März Vormittag 11 Uhr  
ladet im Namen des Lehrer-Kollegiums  
ganz ergebenst ein

der Direktor  
**Gottlieb Theodor Fabian.**

**Inhalt:**

- 1) Die Polaren der ebenen Curven III. Ordnung mit Doppelpunkten. — Ein Beitrag zur Geometrie der Lage vom Gymnasiallehrer Alfons Wilinowski.
- 2) Schulnachrichten vom 31. Juli 1871 bis Ostern 1872, vom Direktor.

---

**Tilsit, 1872.**

Druck von J. Reyländer & Sohn in Tilsit.

# Öffentliche Prüfung

am 1. März 1884

in der

Österreichischen Akademie der Wissenschaften

zu Wien

abgehalten

am

1. März 1884

in der

Österreichischen Akademie der Wissenschaften

zu Wien

abgehalten

am

1. März 1884

in der

Österreichischen Akademie der Wissenschaften

zu Wien

abgehalten

am

1. März 1884

in der

Österreichischen Akademie der Wissenschaften

zu Wien

abgehalten

am

1. März 1884

in der

Österreichischen Akademie der Wissenschaften



Die Eigenschaften der Polaren der Curven III. Ordnung sind, soviel mir bekannt, bis jetzt nur analytisch, oder doch, wie Cremona es gethan, durch Rechnung abgeleitet worden. Man kann zu ihnen aber auch allein durch die Hilfsmittel, welche die Geometrie der Lage bietet, gelangen. In den folgenden Mittheilungen sind allerdings nur die Curven III. O. mit Doppelpunkten berücksichtigt, denn der eingeschlagene Weg läßt sich auf Curven III. O. ohne Doppelpunkte deshalb nicht ausdehnen, weil der dazu nothwendige Satz 68. für solche bis jetzt auf rein geometrischem Wege nicht bewiesen ist. Zwar hat Reye in seinem ausgezeichneten Buche „Geometrie der Lage“ auf Seite 189 des II. Theils einen Beweis desselben mitgetheilt, doch scheint derselbe nicht allgemein zu sein. Er leitet die Eigenschaften der ebenen Curven III. O. aus denen der Oberflächen III. O. ab. Auf diesen giebt es Raumcurven III. O., die von jeder Ebene in 3 Punkten geschnitten werden. Solche 3 Punkte sind aber in Beziehung auf die ebene Curve III. O., in welcher die Oberfläche III. O. von einer Ebene geschnitten wird, nicht unabhängig von einander; Steiner nennt sie Tripelpunkte und durch 2 von ihnen ist der dritte bestimmt. Reye's Beweis des Satzes 68. gilt aber nur für den Fall, daß 3 der Basispunkte des die Curve III. O. erzeugenden Regelschnittbüschels 3 Tripelpunkte sind. — In den Eigenschaften des Regelschnittkegels, welche Steiner so schön zur Herleitung einiger wichtiger Theoreme der Curven III. O. benutzt hat (cf. Schröter, Steiners Vorlesungen §. 62.) ist jedoch ein Mittel gegeben, nicht nur jenen Satz 68. sondern auch die vollständige Theorie der Polaren einer Curve III. O. rein geometrisch abzuleiten, worauf an dieser Stelle nicht weiter eingegangen werden kann. — Die öfter citirten Werke sind: Cremona, Einleitung in eine geometrische Theorie der ebenen Curven, übersetzt von Curze, und Dürge, die ebenen Curven III. Ordnung.

## I. Die Polaren einer Curve III. Ordnung mit 3 Doppelpunkten.

1. Schneidet man die Seiten eines Dreiecks durch eine Gerade und construirt zu den Schnittpunkten in Bezug auf die Ecken ihre harmonischen Gegenpunkte, so treffen sich die Verbindungslinien dieser und der Gegenecken in einem Punkt — und umgekehrt.

Fig. I. Die Seiten des Dreiecks ABC werden von der Geraden  $g$  in  $\alpha^1\beta^1\gamma^1$  geschnitten; die harmonischen Gegenpunkte dieser in Bezug auf die Ecken seien  $\alpha\beta\gamma$ , so gehen durch B die harmonisch getheilten Geraden AB und BC; es müssen sich also AC,  $\alpha\gamma$ ,  $\alpha\gamma^1$  in einem Punkt schnei-



den. Dieser ist  $\beta^1$ , also liegen  $\alpha\beta^1\gamma$ ,  $\alpha^1\beta\gamma$ ,  $\alpha\beta\gamma^1$  je in einer Geraden. Die Linien  $A\alpha$  und  $C\gamma$  mögen sich in  $O$  schneiden, dann sind  $BA$ ,  $BC$ ,  $BO$ ,  $B\beta^1$  4 harmonische Strahlen. Da aber auch  $BA$ ,  $BC$ ,  $B\beta$ ,  $B\beta^1$  4 harmonische Strahlen sind, so fallen  $BO$  und  $B\beta$  in eine Gerade zusammen, d. h.  $B\beta$  geht durch den Durchschnitt  $O$  von  $A\alpha$  und  $C\gamma$ .

Man nennt die Gerade  $g$  die gerade Polare von  $O$  und umgekehrt  $O$  den Pol von  $g$  bezüglich des Dreiecks  $ABC$ .

2. Zieht man durch  $O$  eine beliebige Gerade  $l$ , welche die Seiten des Dreiecks  $ABC$  in den Punkten  $MNP$  und die gerade Polare  $g$  von  $O$  in  $O^1$  schneidet, so ist der Punkt  $O^1$  nur von der Lage des Punktes  $O$  gegen die Punkte  $MNP$  abhängig.

Legt man nämlich durch  $MNP$  die Seiten eines andern Dreiecks  $A_1B_1C_1$ , so treffen sich die Verbindungslinien der Ecken  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  in einem Punkt  $L$ , weil  $MNP$  in gerader Linie liegen. — Man kann daher  $L$  und  $l$  als Centrum und Achse zweier collinearen Systeme in perspectivischer Lage betrachten. Da  $O$  ein Punkt der Achse  $l$  ist, so fällt sein entsprechender  $O_1$  im andern System mit ihm zusammen. Der Linie  $OA$  entspricht  $OA_1$ , dem Schnittpunkt  $\alpha$  von  $OA$  und  $BC$  der Schnittpunkt  $\alpha_1$  von  $OA_1$  und  $B_1C_1$ , dem harmonischen Gegenpunkt  $\alpha^1$  von  $\alpha$  in Bezug auf  $BC$  der harmonische Gegenpunkt  $\alpha_1^1$  von  $\alpha_1$  bezüglich  $B_1C_1$ , der Geraden  $\alpha^1\beta^1\gamma^1$  eine Gerade  $\alpha_1^1\beta_1^1\gamma_1^1$ . Da aber zwei entsprechende Gerade zweier perspectivisch liegender collinearer Systeme sich in einem Punkt der Achse schneiden müssen und  $\alpha^1\beta^1\gamma^1$  diese in  $O^1$  trifft, so muß auch  $\alpha_1^1\beta_1^1\gamma_1^1$  durch  $O^1$  gehen.

Der Punkt  $O^1$  heißt der harmonische Mittelpunkt des ersten Grades für die Punkte  $MNP$  in Bezug auf  $O$ .

3. Sind auf einer Geraden  $l$  die 4 Punkte  $MNP$  und  $O$  gegeben, so findet man den harmonischen Mittelpunkt des ersten Grades von  $MNP$  bezüglich  $O$ , wenn man durch  $MNP$  die 3 Seiten eines beliebigen Dreiecks  $ABC$  legt und den Schnittpunkt von  $l$  mit der geraden Polare von  $O$  in Bezug auf  $ABC$  bestimmt,

oder:

Die gerade Polare eines Punktes  $O$  in Bezug auf ein Dreieck  $ABC$  schneidet jede durch  $O$  gelegte Gerade im harmonischen Mittelpunkt ersten Grades für ihre Schnittpunkte mit den Seiten in Bezug auf  $O$ .

Beweis folgt aus 2.

4. Die Pole aller Geraden  $g_1g_2\dots$ , welche durch einen Punkt  $P$  gehen, in Bezug auf ein Dreieck  $ABC$ , liegen auf einem Kegelschnitt  $\kappa$ , der durch die Ecken  $ABC$  geht.

Durch einen Punkt  $P$  lege man beliebige Gerade  $g_1g_2g_3\dots$  und bezeichne ihre Schnittpunkte mit den Seiten des Dreiecks  $ABC$  mit den Buchstaben  $\alpha^1\beta^1\gamma^1$ ,  $\alpha_1^1\beta_1^1\gamma_1^1$ ,  $\alpha_2^1\beta_2^1\gamma_2^1$ ,  $\dots$ .



sodasß alle  $\alpha$  auf  $BC$ , alle  $\beta$  auf  $AC$ , alle  $\gamma$  auf  $AB$  liegen. Die harmonischen Gegenpunkte dieser Punkte bezüglich der Ecken seien  $\alpha\beta\gamma$ ,  $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ ,  $\alpha_2\beta_2\gamma_2$ , ...; dann sind die Punktreihen  $\alpha^1\alpha_1^1\alpha_2^1\dots$ ,  $\beta^1\beta_1^1\beta_2^1\dots$ ,  $\gamma^1\gamma_1^1\gamma_2^1\dots$  in perspectivischer Lage und daher  $\alpha\alpha_1\alpha_2\dots$ ,  $\beta\beta_1\beta_2\dots$ ,  $\gamma\gamma_1\gamma_2\dots$  projectivisch. Verbindet man alle Punkte  $\alpha$  mit  $A$ , alle  $\beta$  mit  $B$ , alle  $\gamma$  mit  $C$ , so sind auch die Strahlenbüschel  $A(\alpha\alpha_1\alpha_2\dots)$ ,  $B(\beta\beta_1\beta_2\dots)$ ,  $C(\gamma\gamma_1\gamma_2\dots)$  projectivisch. Je 3 entsprechende Strahlen dieser Büschel schneiden sich in einem Punkt  $OO_1O_2\dots$ , dem Pol der betreffenden Geraden  $g_1g_2\dots$ . Da aber diese Büschel einen Regelschnitt  $\kappa$  erzeugen, so folgt, daß die Punkte  $ABC$  und die Pole  $OO_1O_2\dots$  auf einem Regelschnitt liegen.

Den Regelschnitt  $\kappa$  nennt man die conische Polare des Punktes  $P$  in Bezug auf das Dreieck  $ABC$  und umgekehrt  $P$  den Pol von  $\kappa$ .

(cfr. Programm der Realschule auf der Burg zu Königsberg i. Pr. 1869. Ueber Abhängigkeit geometrischer Gebilde von Wilhelm Fuhrmann.)

5. Die conische Polare eines Punktes  $P$  in Bezug auf ein Dreieck  $ABC$  ist der geometrische Ort für die Pole aller Geraden, welche sich in  $P$  schneiden.

6. Liegt ein Punkt  $O$  auf der conischen Polare  $\kappa$  eines andern Punktes  $P$ , so liegt  $P$  auf der geraden Polare von  $O$  und umgekehrt.

Folgt aus 4.

7. Die conische Polare  $\kappa$  eines Punktes  $P$  in Bezug auf ein Dreieck  $ABC$  berührt in den Ecken  $ABC$  die Geraden  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$ , wenn  $A'B'T'$  die harmonischen Gegenpunkte der Punkte  $ABT$  bezüglich der Dreiecksseiten und  $A_1BT_1$  die Punkte sind, in denen die Seiten von den Geraden  $AP$ ,  $BP$ ,  $CP$  geschnitten werden.

In den Büscheln  $A(\alpha\alpha_1\alpha_2\dots)$  und  $C(\gamma\gamma_1\gamma_2\dots)$ , welche (cf. 4.) die conische Polare  $\kappa$  von  $P$  erzeugen, entspricht dem Strahl  $AC$  von  $A$  der Strahl  $CT'$  von  $C$ , also berührt  $\kappa$  den Strahl  $CT'$  in  $C$ .

Man kann dem letzten Satz auch folgende Fassung geben:

Die conische Polare  $\kappa$  eines Punktes  $P$  ist ein Regelschnitt, dessen Tangente in jeder Ecke harmonisch ist zu dem nach dem Pol gehenden Strahl bezüglich der beiden Dreiecksseiten.

8. Die conischen Polaren aller Punkte einer Geraden bilden ein Büschel.

Die Gerade sei  $g$  und  $PP_1P_2\dots$  beliebige Punkte derselben, dann müssen ihre conischen Polaren  $\kappa\kappa_1\kappa_2\dots$  außer durch die Ecken des Dreieckes auch durch den Pol  $O$  von  $g$  gehen, also ein Büschel bilden.

9. Alle conischen Polaren, welche durch einen Punkt  $O$  gehen, bilden ein Büschel. Denn sie gehen sämtlich auch durch die Ecken des Dreieckes.



10. Durch 2 Punkte  $O$  und  $O_1$  läßt sich eine conische Polare legen. Dieselbe ist der durch die 5 Punkte  $ABCOO_1$  bestimmte Kegelschnitt.
11. Alle Büschel conischer Polaren, deren Pole auf solchen Geraden liegen, die sich in einem Punkt schneiden, haben einen Kegelschnitt gemeinschaftlich. Nämlich die conische Polare des Schnittpunktes aller Geraden.
12. Die Schnittpunkte der conischen Polare  $x$  eines Punktes  $O$  in Bezug auf ein Dreieck  $ABC$  mit irgend einer Transversale durch  $O$  sind nur abhängig von der Lage von  $O$  gegen die Schnittpunkte der Transversalen mit den Dreiecksseiten.

Irgend eine Transversale  $l$  durch  $O$  schneide die Seiten des Dreiecks  $ABC$  in den Punkten  $MNP$ . Durch letztere lege man die Seiten eines zweiten Dreiecks  $A_1B_1C_1$ , so treffen sich  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  in einem Punkt  $L$  und man kann  $L$  und  $l$  als Centrum und Achse 2er perspectivisch liegender collinearer Systeme betrachten, in denen  $A$  und  $A_1$ ,  $B$  und  $B_1$ ,  $C$  und  $C_1$  entsprechende Punkte sind. Dann sind die conischen Polaren von  $O$  bezüglich beider Dreiecke entsprechende Kegelschnitte in den collinearen Systemen, denn sie gehen durch die entsprechenden Punkte  $ABC$  und  $A_1B_1C_1$  und berühren in ihnen entsprechende Gerade. Die geraden Polaren nämlich von  $O$  bezüglich der beiden Dreiecke sind entsprechende Gerade (cf. 2.); ihre Schnittpunkte  $a'\beta'\gamma'$  und  $a_1'\beta_1'\gamma_1'$  mit den Seiten entsprechende Punkte und daher  $Aa'$  und  $A_1a_1'$ ,  $B\beta'$  und  $B_1\beta_1'$ ,  $C\gamma'$  und  $C_1\gamma_1'$  wieder entsprechende Gerade. Diese sind aber (cf. 7.) die Tangenten der conischen Polaren in den Ecken. Da also die conischen Polaren entsprechende Kegelschnitte sind, so müssen zwei ihrer Schnittpunkte auf der Achse  $l$  der collinearen Systeme liegen. Diese beiden Schnittpunkte sind also von dem Dreieck, das durch die Punkte  $MNP$  gelegt ist, unabhängig.

Man nennt sie die harmonischen Mittelpunkte des zweiten Grades von  $MNP$  in Bezug auf  $O$ .

13. Die harmonischen Mittelpunkte zweiten Grades in Bezug auf einen Punkt  $O$  für die Schnittpunkte irgend einer Geraden durch  $O$  mit den Seiten eines Dreiecks  $ABC$  liegen auf der conischen Polare von  $O$  bezüglich  $ABC$ .

Folgt aus 12.

14. Ist  $O^1$  ein harmonischer Mittelpunkt des ersten Grades für 3 Punkte  $MNP$  bezüglich  $O$ , so ist  $O$  ein harmonischer Mittelpunkt des zweiten Grades für  $MNP$  bezüglich  $O^1$ .

Denn legt man durch  $MNP$  die Seiten irgend eines Dreiecks  $ABC$ , so geht die gerade Polare von  $O$  in Bezug auf dasselbe durch  $O^1$ , also nach 6. die conische Polare von  $O^1$  durch  $O$ .

15. Fallen von 3 Punkten  $MNP$  einer Geraden  $l$  zwei, etwa  $M$  und  $N$ , zusammen, so fällt auch einer der harmonischen Mittelpunkte II. Grades für diese Punkte in Bezug auf jeden Punkt  $O$  von  $l$  mit jenen beiden zusammen.



Legt man nämlich durch  $MNP$  die Seiten irgend eines Dreiecks  $ABC$ , so muß eine Ecke desselben, etwa  $A$ , mit  $(MN)$  zusammenfallen. Die conische Polare von  $O$  bezüglich  $ABC$  geht aber durch  $A$ , also liegt in  $A$  einer der harmonischen Mittelpunkte des zweiten Grades.

15a. Sind  $ONP$  drei Punkte einer Geraden  $g$ , so fällt der harmonische Mittelpunkt I. Grades derselben bezüglich eines von ihnen z. B.  $O$  mit diesem zusammen; von den harmonischen Mittelpunkten des II. Grades fällt der eine auch mit  $O$  zusammen und der andere trennt ihn von  $N$  und  $P$  harmonisch.

Durch  $ONP$  lege man die Seiten eines Dreiecks  $ABC$ , so daß  $O$  und  $A$ ,  $N$  und  $B$ ,  $P$  und  $C$  einander gegenüberliegen, dann fällt die gerade Polare von  $O$  mit  $BC$  zusammen. Die conischen Polaren aller Punkte von  $g$  schneiden sich in  $ABC$  und dem Pol  $G$  von  $g$ ; die conischen Polaren von  $ONP$  sind die 3 Geradenpaare des Büschels und zwar ist die von  $O$  das Geradenpaar  $(BC, AG)$ . Die 4 Geraden  $AB, AC, AO, AG$  sind aber 4 harmonische Strahlen, also wird der Punkt  $O$  durch  $AG$  von  $N$  und  $P$  harmonisch getrennt.

16. Die geraden Polaren aller Punkte einer Geraden in Bezug auf ein Dreieck  $ABC$  werden von einem Kegelschnitt umhüllt, der die Poloconik der Geraden heißt, und die Seiten in den Punkten berührt, welche ihre Schnittpunkte mit der Geraden von den Ecken harmonisch trennen.

Auf einer Geraden  $l$  liegen die Punkte  $OO_1O_2\dots$ . Ihre Verbindungslinien mit den Ecken  $ABC$  bestimmen auf den Seiten  $BC, AC, AB$  drei Punktreihen  $\alpha\alpha_1\alpha_2\dots, \beta\beta_1\beta_2\dots, \gamma\gamma_1\gamma_2\dots$  in perspectivischer Lage, denen drei andere projektivische Punktreihen entsprechen, gebildet durch die harmonischen Gegenpunkte jener  $\alpha^1\alpha_1^1\alpha_2^1\dots, \beta^1\beta_1^1\beta_2^1\dots, \gamma^1\gamma_1^1\gamma_2^1\dots$  in Bezug auf die Ecken des Dreiecks. Je 3 entsprechende Punkte derselben  $\alpha^1\beta^1\gamma^1, \alpha_1^1\beta_1^1\gamma_1^1, \alpha_2^1\beta_2^1\gamma_2^1, \dots$  liegen in einer Geraden und werden von einem Kegelschnitt  $\mathcal{C}$  umhüllt, der auch die Seiten des Dreiecks berührt, weil  $A$  und  $B$  entsprechende Punkte der Punktreihen  $\beta^1\dots$  auf  $AC$  und  $\alpha^1\dots$  auf  $BC$  sind. Um den Berührungspunkt auf einer der Seiten z. B.  $AC$  zu bestimmen, hat man den dem Punkt  $C$  entsprechenden Punkt zu bestimmen. Dieser ist aber der harmonische Gegenpunkt des Schnittpunkts von  $l$  mit  $AC$  in Bezug auf die Ecken  $A$  und  $C$ . Die Linien  $\alpha^1\beta^1\gamma^1, \alpha_1^1\beta_1^1\gamma_1^1, \dots$  sind aber die geraden Polaren von  $OO_1\dots$ , also werden dieselben von einem Kegelschnitt umhüllt.

16a. Die Poloconik einer Geraden, welche durch eine Ecke des Dreiecks geht, ist ein Punktpaar, dessen einer Theil diese Ecke ist.

Die Gerade sei  $l$  und gehe durch die Ecke  $A$ . Die Punktreihen  $\beta^1\beta_1^1\beta_2^1\dots$  und  $\gamma^1\gamma_1^1\gamma_2^1\dots$  haben  $A$  entsprechend gemein, also sind sie in perspectivischer Lage und es schneiden sich daher die Verbindungslinien entsprechender Punkte in einem Punkt, dieser ist  $\alpha^1$ ; daher ist die Poloconik von  $l$  das Punktpaar  $(A\alpha^1)$ .

16b. Die gerade Polare  $l$  eines Punktes  $O$  ist zugleich seine Polare bezüglich der Poloconik  $\mathcal{C}$  von  $l$ .



I schneide die Seiten von  $ABC$  in  $\alpha'\beta'\gamma'$ , dann berührt  $\mathcal{C}$  die Seiten in den harmonischen Gegenpunkten  $\alpha\beta\gamma$  jener bezüglich der Ecken und  $A\alpha$ ,  $B\beta$ ,  $C\gamma$  treffen sich in  $O$ . Diese Linien sind aber die Polaren von  $\alpha'\beta'\gamma'$  bezüglich  $\mathcal{C}$ , denn  $\alpha'$  z. B. wird durch  $A\alpha$  von  $\beta$  und  $\gamma$  harmonisch getrennt und  $\alpha$  ist der Berührungspunkt von  $\alpha'\alpha$  mit der Poloconik, also ist  $O$  der Pol von  $I$ .

17. Die Poloconiken aller Geraden, die sich in einem Punkt schneiden, bilden eine Regelschnittschaar mit vier gemeinschaftlichen Tangenten.

Denn sie berühren alle die drei Seiten des Dreiecks und die gerade Polare des gemeinschaftlichen Schnittpunktes.

18. Die gerade Polare  $p$  eines Punktes  $P$  in Bezug auf ein Dreieck  $ABC$  ist zugleich die Polare von  $P$  in Bezug auf seine conische Polare.

Die Verbindungslinien  $PA$ ,  $PB$ ,  $PC$  schneiden die Seiten  $BC$ ,  $AC$ ,  $AB$  in  $\alpha\beta\gamma$ ; sind  $\alpha'\beta'\gamma'$  deren harmonische Gegenpunkte in Bezug auf die Ecken, so berührt die conische Polare  $\kappa$  von  $P$  die Linien  $A\alpha'$ ,  $B\beta'$ ,  $C\gamma'$  in  $ABC$  (cf. 7.). Die Polaren von  $\alpha'\beta'\gamma'$  bezüglich  $\kappa$  sind  $A\alpha$ ,  $B\beta$ ,  $C\gamma$ . Diese schneiden sich in  $P$ , also ist  $P$  der Pol von  $\alpha'\beta'\gamma'$  bezüglich  $\kappa$  oder  $\alpha'\beta'\gamma'$  d. i. die gerade Polare von  $P$  die Polare von  $P$  in Bezug auf  $\kappa$ .

19. Liegen auf einer Geraden die 4 Punkte  $MNP$  und  $O$ , so werden die harmonischen Mittelpunkte II. Grades von  $MNP$  bezüglich  $O$  durch den harmonischen Mittelpunkt des ersten Grades von  $O$  harmonisch getrennt.

Denn legt man durch  $MNP$  die Seiten eines beliebigen Dreiecks  $ABC$ , so geht die conische Polare von  $O$  bezüglich desselben durch die harmonischen Mittelpunkte des II. Grades, die Polare von  $O$  aber bezüglich seiner conischen Polare (cf. 18.) durch den harmonischen Mittelpunkt des ersten Grades.

20. Die Polaren aller Punkte einer Geraden in Bezug auf ihre conischen Polaren haben als Einhüllende die Poloconik der Geraden.

Folgt aus 16. und 18.

21. Die Poloconik einer Geraden ist der Ort der Pole dieser Geraden in Bezug auf die conischen Polaren ihrer Punkte.

Auf einer Geraden  $l$  seien die Punkte  $PP_1P_2 \dots$ . Ihre conischen Polaren  $\kappa\kappa_1\kappa_2 \dots$  bilden ein Büschel mit den 4 Basispunkten  $ABCL$ , wenn  $ABC$  die Ecken des Dreiecks und  $L$  der Pol von  $l$  bezüglich  $ABC$  ist. Die Polaren dieser Punkte bezüglich ihrer conischen Polaren werden von der Poloconik  $\mathcal{C}$  von  $l$  umhüllt. Von den Regelschnitten des Büschels berühren zwei,  $\mu$  und  $\nu$ , die  $l$  in  $M$  und  $N$ . Die Polaren von  $M$  bezüglich aller Regelschnitte  $\kappa\kappa_1\kappa_2 \dots$  schneiden sich in  $N$ , also geht durch  $N$  und ebenso durch  $M$  nur eine Tangente an die Poloconik  $\mathcal{C}$ , d. h.  $M$  und  $N$  liegen auf  $\mathcal{C}$ . Unter den Regelschnitten des Büschels giebt es 3 Geradenpaare, deren Scheitel  $QQ'Q''$  sein mögen. Es seien diese Geradenpaare die conischen Polaren von  $PP_1P''$  auf  $l$  und man bezeichne sie mit  $\kappa\kappa_1\kappa''$ . Die Punkte  $PP_1P''$  sind dann die Durchschnitte von  $l$  mit



den Seiten  $BC$ ,  $AC$ ,  $AB$  und die Punkte  $QQ'Q''$  sind die harmonischen Gegenpunkte von jenen in Bezug auf die Ecken. Die Poloconik  $\mathcal{C}$  von  $l$  berührt daher die Seiten in  $QQ'Q''$ . Also liegen die 5 Punkte  $MNQQ'Q''$  auf  $\mathcal{C}$ . Diese Punkte sind aber die Pole von  $l$  bezüglich der Kegelschnitte  $\mu\nu\kappa\kappa'x''$  des Büschels. Die Pole von  $l$  bezüglich aller Kegelschnitte des Büschels liegen aber auf einem Kegelschnitt und da dieser mit der Poloconik 5 Punkte  $MNQQ'Q''$  gemein hat, so liegen auf ihr die Pole von  $l$  bezüglich der conischen Polaren aller Punkte von  $l$ .

22. Die gerade Polare irgend eines Punktes  $P$  von  $l$  berührt die Poloconik von  $l$  in dem Pol von  $l$  bezüglich der conischen Polare  $k$  von  $P$ .

Die Pole von  $l$  bezüglich der conischen Polaren  $\kappa\kappa_1\kappa_2 \dots$  ihrer Punkte  $PP_1P_2 \dots$  sind dieselben Kegelschnitten und also auch den Punkten  $PP_1P_2 \dots$  projectivisch, also auch den Polaren dieser Punkte bezüglich  $\kappa\kappa_1\kappa_2 \dots$ , d. h. den Tangenten der Poloconik  $\mathcal{C}$  von  $l$ . Durch die Punkte  $QQ'Q''$  von  $\mathcal{C}$  gehen die Polaren von  $PP_1P_2$ ; es sind aber  $QQ'Q''$  die Pole von  $l$  bezüglich  $\kappa\kappa'x''$ ; also sind die Tangenten von  $\mathcal{C}$  in perspectivischer Lage mit den Polen von  $l$  bezüglich der Kegelschnitte  $\kappa\kappa'x''\kappa_1\kappa_2 \dots$ , woraus der Satz folgt.

23. Sind  $\kappa_1\kappa_2$  die conischen Polaren der Punkte  $P_1P_2$ , so fällt die Polare von  $P_1$  bezüglich  $\kappa_2$  mit der Polare von  $P_2$  bezüglich  $\kappa_1$  zusammen. — Diese Linie heißt (nach Cremona) die gemischte gerade Polare der Punkte  $P_1$  und  $P_2$ .

Die Verbindungslinie von  $P_1P_2$  sei  $l$  und es bilden daher die conischen Polaren aller Punkte von  $l$  ein Kegelschnittbüschel, zu dem auch die Kegelschnitte  $\kappa_1\kappa_2$  gehören. Die Pole von  $l$  bezüglich  $\kappa_1$  und  $\kappa_2$  seien  $H_1$  und  $H_2$ , dann schneiden sich die Polaren aller Punkte von  $l$  bezüglich  $\kappa_1$  in  $H_1$ , bezüglich  $\kappa_2$  in  $H_2$ . Die conjugirten Punkte von  $P_1$  und  $P_2$  bezüglich des Büschels der conischen Polaren der Punkte von  $l$ , d. h. diejenigen Punkte, in denen sich die Polaren von  $P_1$  resp.  $P_2$  in Bezug auf alle Kegelschnitte des Büschels schneiden, seien  $P_1'$  und  $P_2'$  so sind  $H_1P_1'$  und  $H_2P_2'$  die Polaren von  $P_1$  und  $P_2$  in Bezug auf  $\kappa_1$  und  $\kappa_2$ . Der geometrische Ort der Pole einer Geraden  $l$  in Bezug auf die Kegelschnitte eines Büschels ist aber (cf. Schröter, Steiners Vorlesungen pag. 314) auch der Ort derjenigen Punkte, welche den Punkten von  $l$  in Bezug auf das Büschel conjugirt sind, also liegen  $P_1'$  und  $P_2'$  auch auf der Poloconik  $\mathcal{C}$  von  $l$ . Da aber die Polare von  $P_1$  bezüglich  $\kappa_1$  die Tangente an  $\mathcal{C}$  in  $H_1$  ist, so muß  $P_1'$  mit  $H_1$  und ebenso  $P_2'$  mit  $H_2$  zusammen fallen. Die Polare von  $P_1$  bezüglich  $\kappa_2$  ist aber  $P_1' H_2$  und die von  $P_2$  bezüglich  $\kappa_1$  ist  $P_2' H_1$ , d. h. diese beiden Linien müssen zusammenfallen in die Linie  $H_1 H_2$ .

24. Die Tangenten von irgend einem Punkt  $O$  an die Poloconik  $\mathcal{C}$  einer Geraden  $l$  sind die geraden Polaren der Schnittpunkte der conischen Polaren von  $O$  mit  $l$ .

Sind  $PP_1$  diese Schnittpunkte, so müssen ihre geraden Polaren durch  $O$  gehen, weil sie selbst auf der conischen Polare von  $O$  liegen.



24a. Die Polaren eines Punktes  $P$  in Bezug auf die Poloconiken aller Geraden  $l_1, l_2 \dots$  durch  $P$  werden von der conischen Polare  $\pi$  von  $P$  umhüllt.

Sei  $p$  die gerade Polare von  $P$  in Bezug auf  $\triangle ABC$  und schneide die Seiten  $abc$  in den Punkten  $\alpha'\beta'\gamma'$ , so bilden die Poloconiken  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \dots$  von  $l_1, l_2 \dots$  eine Regelschnittschaar mit den 4 festen Tangenten  $abcp$  (cf. 17.). Vom Punkt  $P$  gehen an jede Poloconik 2 Tangenten, deren Pole bezüglich  $ABC$  die Schnittpunkte von  $l$  mit der conischen Polare  $\pi$  von  $P$  sind (cf. 24.). Unter allen Poloconiken der Geraden durch  $P$  giebt es zwei  $M$  und  $N$ , welche durch  $P$  gehen und in  $P$  die Geraden  $m$  und  $n$  berühren, dann müssen  $m$  und  $n$  auch die conische Polare  $\pi$  berühren und sind zugleich die Polaren von  $P$  bezüglich  $M$  und  $N$ . Die Poloconiken der Linien  $PA, PB, PC$  sind die Punktpaare  $(A\alpha'), (B\beta'), (C\gamma')$ ; die Polaren von  $P$  bezüglich derselben sind die Geraden  $A\alpha', B\beta', C\gamma'$ , welche (cf. 7.) von der conischen Polare  $\pi$  von  $P$  in  $ABC$  berührt werden. Da aber die Polaren des Punktes  $P$  in Bezug auf alle Regelschnitte der Regelschnittschaar von Poloconiken von einem Regelschnitt umhüllt werden, so muß dieser mit der conischen Polare  $\pi$  von  $P$  zusammenfallen, da beide 5 gemeinschaftliche Tangenten haben.

24b. Der Pol irgend einer Geraden  $l$  durch  $P$  bezüglich des Dreiecks  $ABC$  ist der Berührungspunkt der conischen Polare  $\pi$  von  $P$  mit der Polare von  $P$  bezüglich der Poloconik von  $l$ .

Die Polaren von  $P$  bezüglich der Poloconiken  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \dots$  der durch  $P$  gehenden Geraden  $l_1, l_2 \dots$  sind diesen Regelschnitten und also auch den Geraden  $l_1, l_2 \dots$  projectivisch, also auch den Polen dieser Geraden bezüglich der Poloconiken  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \dots$ , d. h. den Punkten der conischen Polare  $\pi$  von  $P$  (cf. 4.). Durch die Punkte  $ABC$  gehen aber die Polaren von  $P$  bezüglich der Punktpaare  $(A\alpha'), (B\beta'), (C\gamma')$  und  $ABC$  sind die Berührungspunkte, also sind die Punkte von  $\pi$  in perspectivischer Lage mit den Polaren von  $P$  bezüglich  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \dots$ .

24c. Sind  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$  die Poloconiken von  $l_1, l_2$ , so fällt der Pol von  $l_1$  bezüglich  $\mathcal{C}_2$  mit dem Pol von  $l_2$  bezüglich  $\mathcal{C}_1$  zusammen. Dieser Punkt mag der gemischte Pol von  $l_1, l_2$  heißen.

Es sei  $P$  der Schnittpunkt von  $l_1, l_2$  und  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \dots$  seien die Poloconiken der durch  $P$  gelegten Geraden  $l_1, l_2 \dots$ , so bilden diese eine Regelschnittschaar. Die Polaren von  $P$  bezüglich  $\mathcal{C}_1$  und  $\mathcal{C}_2$  seien  $p_1$  und  $p_2$ , dann liegen die Pole aller durch  $P$  gelegten Geraden bezüglich  $\mathcal{C}_1$  auf  $p_1$ , bezüglich  $\mathcal{C}_2$  auf  $p_2$ . Jede der beiden Geraden  $l_1$  und  $l_2$  hat in Bezug auf die Regelschnitte der Schaar (cf. Schröter pag. 333) eine conjugirte Gerade  $l_1'$  und  $l_2'$ , d. h. die Pole von  $l_1$  in Bezug auf alle Regelschnitte der Schaar liegen auf  $l_1'$  und umgekehrt. Es sind also die Schnittpunkte  $(p_1, l_1')$  und  $(p_2, l_2')$  die Pole von  $l_1$  und  $l_2$  bezüglich  $\mathcal{C}_1$  und  $\mathcal{C}_2$ . Die Geraden, welche den sämtlichen durch  $P$  gehenden Geraden, conjugirt sind, werden aber (Schröter pag. 340) von demselben Regelschnitt  $\pi$ , an welchem die sämtlichen Polaren von  $P$  bezüglich der Regelschnitte  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \dots$  Tangenten sind, also nach 24. a. von der conischen Polare von  $P$  umhüllt, also sind  $l_1'$  und  $l_2'$  auch



Tangenten von  $\pi$ . Da der Pol von  $l_1$  bezüglich  $\mathcal{C}_1$  der Berührungspunkt von  $p_1$  mit  $\pi$  (cf. 24. b.) sein muß, und nach Obigem auch der Durchschnitt von  $p_1$  mit  $l_1$  ist und letztere Gerade auch  $\pi$  berührt, so muß  $p_1$  mit  $l_1$  zusammenfallen, und ebenso  $p_2$  mit  $l_2$ . Der Pol von  $l_1$  bezüglich  $\mathcal{C}_2$  ist aber der Schnittpunkt  $(l_1 p_2)$  oder  $(p_1 p_2)$ , der von  $l_2$  bezüglich  $\mathcal{C}_1$  ist  $(l_2 p_1)$  oder  $(p_2 p_1)$ , also fallen beide zusammen.

25. Die Poloconik einer Geraden  $l$  ist der geometrische Ort der Punkte, deren conische Polaren  $l$  berühren. (Cremona art. 104, b.)

Denn ist  $O$  ein Punkt der Poloconik, so geht durch ihn nur eine Tangente an diese, also muß die conische Polare von  $O$  die  $l$  berühren. —

26. Die conische Polare eines Punktes  $O$  ist die Einhüllende der Geraden, deren Poloconiken durch  $O$  gehen. (Cremona art. 103, f.)

Ist  $O$  ein Punkt der Poloconik  $\mathcal{C}$  von  $l$ ,  $\mathcal{C}_1$  von  $l_1$ ,  $\mathcal{C}_2$  von  $l_2$ , ... so muß (nach 25.) seine conische Polare alle Geraden  $l, l_1, l_2, \dots$  berühren.

27. Die geraden Polaren aller Punkte eines Kegelschnitts werden von einer Curve der IV. Klasse umhüllt. (Cremona art. 84.)

Sei  $K$  ein beliebiger Kegelschnitt,  $O$  ein Punkt desselben, so schneidet die conische Polare von  $O$  den Kegelschnitt  $K$  in 4 Punkten, deren gerade Polaren die einzigen sind, welche durch  $O$  gehen.

28. Die geraden Polaren aller Punkte eines Kegelschnitts, welcher durch eine Ecke des Dreiecks geht, werden von einer Curve der III. Klasse umhüllt.

Denn die conische Polare eines beliebigen Punktes des Kegelschnitts trifft außer in der Ecke, durch welche dieser geht, die conische Polare jenes Punktes nur noch in drei Punkten, deren gerade Polaren sich in jenem schneiden.

29. Die geraden Polaren aller Punkte eines Kegelschnitts  $K$ , welcher durch zwei Ecken  $AB$  des Dreiecks  $ABC$  geht, werden von einem Kegelschnitt umhüllt, der die Seiten  $AC$  und  $BC$  in den harmonischen Gegenpunkten ihrer Schnittpunkte mit  $K$  berührt.

Der Kegelschnitt  $K$  gehe durch  $A$  und  $B$ ; sind  $OO_1, O_2, \dots$  beliebige Punkte von  $K$ , so bestimmen die Strahlen  $AO, AO_1, AO_2, \dots$  und  $BO, BO_1, BO_2, \dots$  auf  $BC$  und  $AC$  zwei projectivische Punktreihen  $\alpha\alpha_1, \alpha_2, \dots$  und  $\beta\beta_1, \beta_2, \dots$ , deren harmonische Gegenpunkte in Bezug auf die Punkte  $BC$  und  $AC$ , nämlich  $\alpha'\alpha'_1, \alpha'_2, \dots$  und  $\beta'\beta'_1, \beta'_2, \dots$  wieder zwei Punktreihen in projectivischer Beziehung sind. Die Verbindungslinien  $\alpha'\beta', \alpha'_1\beta'_1, \alpha'_2\beta'_2, \dots$  werden von einem Kegelschnitt  $K'$  umhüllt und sind die geraden Polaren der Punkte  $OO_1, O_2, \dots$ . Der Kegelschnitt  $K$  schneide  $BC$  in  $M$ ,  $AC$  in  $N$ , so berührt  $K'$  diese Seiten in  $M'N'$ , wenn  $M'N'$  die harmonischen Gegenpunkte von  $MN$  in Bezug auf die Ecken sind.

30. Bilden die Kegelschnitte  $KK_1, K_2, \dots$  ein Büschel durch 2 Ecken  $AB$  und 2 Punkte  $MN$  auf den Seiten  $BC$  und  $AC$ , so berühren sich alle Kegelschnitte,

welche von den geraden Polaren aller Punkte der gegebenen Kegelschnitte umhüllt werden, doppelt in den harmonischen Gegenpunkten  $M^1N^1$  von  $MN$  in Bezug auf die Ecken.

Folgt aus 29.

31. Die geraden Polaren aller Punkte eines Kegelschnitts, welcher durch die 3 Ecken des Dreiecks  $ABC$  geht, schneiden sich in einem Punkt, dessen conische Polare bezüglich  $ABC$  jener Kegelschnitt ist.

Ist  $K$  der Kegelschnitt durch  $ABC$  und sind  $OO_1O_2\ldots$  beliebige Punkte auf ihm, so treffen die Verbindungslinien  $A(OO_1O_2\ldots)$ ,  $B(OO_1O_2\ldots)$ ,  $C(OO_1O_2\ldots)$  die Seiten  $BC$ ,  $AC$ ,  $AB$  in den Punkten  $\alpha\alpha_1\alpha_2\ldots$ ,  $\beta\beta_1\beta_2\ldots$ ,  $\gamma\gamma_1\gamma_2\ldots$ , welche in perspectivischer Lage sind. Ihre harmonischen Gegenpunkte  $\alpha^1\alpha_1^1\alpha_2^1\ldots$ ,  $\beta^1\beta_1^1\beta_2^1\ldots$ ,  $\gamma^1\gamma_1^1\gamma_2^1\ldots$  sind daher in projectivischer Beziehung und je 3 entsprechende, wie  $\alpha^1\beta^1\gamma^1$ ,  $\alpha_1^1\beta_1^1\gamma_1^1$ ,  $\alpha_2^1\beta_2^1\gamma_2^1$ , ... liegen in einer Geraden. Läßt man einen der Punkte  $O$  in eine Ecke z. B.  $A$  rücken, so fallen in  $A$  2 entsprechende Punkte der Punktreihen  $\beta^1\ldots$  und  $\gamma^1\ldots$  zusammen, also sind dieselben in perspectivischer Lage und die Verbindungslinien je 2 entsprechender Punkte schneiden sich in einem Punkt und da die Pole aller dieser Linien, nämlich  $OO_1O_2\ldots$ , in Bezug auf das Dreieck, auf dem Kegelschnitt  $K$  liegen, so ist  $K$  die conische Polare des Schnittpunkts.

32. Der geometrische Ort der Pole je einer von 2 Geraden  $l$  und  $l_1$  in Bezug auf die conischen Polaren der Punkte der andern ist ein Kegelschnitt, welcher die Seiten des Dreiecks  $ABC$  in den 6 Punkten schneidet, in welchen sie von den Poloconiken von  $l$  und  $l_1$  berührt werden. Er heißt (Cremona) die gemischte Poloconik von  $l$  und  $l_1$ .

Fig. IV.  $OO_1O_2\ldots$  seien beliebige Punkte einer Geraden  $g$ , welche  $BC$  in  $M$ ,  $AC$  in  $N$  und  $AB$  in  $P$  schneidet. Die Verbindungslinien dieser Punkte mit den Ecken des Dreiecks bestimmen auf den Seiten desselben drei projectivische Punktreihen  $\alpha\alpha_1\alpha_2\ldots$ ,  $\beta\beta_1\beta_2\ldots$ ,  $\gamma\gamma_1\gamma_2\ldots$  deshalb sind auch die Strahlbüschel  $\alpha(\gamma\gamma_1\gamma_2\ldots)$  und  $\gamma(\alpha\alpha_1\alpha_2\ldots)$  in projectivischer Beziehung und, weil der gemeinschaftliche Strahl  $\alpha\gamma$  sich selbst entspricht, in perspectivischer Lage, also liegen die Schnittpunkte  $(\alpha\gamma_1, \alpha_1\gamma)$ ,  $(\alpha\gamma_2, \alpha_2\gamma)$ , ... in einer Geraden. Zur Punktreihe  $\alpha\ldots$  gehören die beiden Punkte  $C$  und  $B$ . Die ihnen entsprechenden in der Reihe  $\gamma$  sind  $A$  und  $P$ . Da sich aber  $\gamma C$  und  $\alpha A$  in  $O$ ,  $\gamma B$  und  $\alpha P$  in  $P$  schneiden, so ist die Gerade  $OP$  oder  $g$  der perspectivische Durchschnitt. Man folgert nun, daß sich auch  $\alpha\beta_1$  und  $\alpha_1\beta$ ,  $\beta\gamma_1$  und  $\beta_1\gamma$ , ... auf  $g$  schneiden, also ist das Sechseck  $\alpha\beta_1\gamma\alpha_1\beta\gamma_1$  ein Pascalsches und es läßt sich um dasselbe ein Kegelschnitt legen. —

Die Geraden  $l$  und  $l_1$  schneiden die Seiten von  $ABC$  in  $\alpha^1\beta^1\gamma^1$  und  $\alpha_1^1\beta_1^1\gamma_1^1$ ; sind dann  $\alpha\beta\gamma$  und  $\alpha_1\beta_1\gamma_1$  deren harmonische Gegenpunkte in Bezug auf die Ecken, so liegen die letzteren 6 Punkte auf einem Kegelschnitt  $K$ . Die conische Polare von  $\alpha$  ist das Linienpaar  $(BC, A\alpha^1)$ ; es schneide  $\alpha^1\gamma$  die  $l_1$  in  $A_1$ , dann ist  $l$  die Polare von  $A_1$  bezüglich  $(BC, A\alpha^1)$ , also muß  $l$  auch



die Polare von  $\alpha$  bezüglich der conischen Polare von  $A_1$  sein. (cfr. 23.) Sind ferner  $B_1$  und  $T_1$  die Schnittpunkte von  $l_1$  mit  $\alpha\gamma$  und  $\alpha\beta$ , so ist  $l$  die Polare von  $\beta$  bezüglich der conischen Polare von  $B_1$  und auch von  $\gamma$  bezüglich der conischen Polare von  $T_1$ . Die Pole von  $l$  bezüglich der conischen Polaren der Schnittpunkte  $\alpha_1\beta_1\gamma_1$  von  $l_1$  mit den Seiten sind  $\alpha, \beta, \gamma$ , es liegen also die Pole von  $l$  bezüglich der conischen Polaren der Punkte  $A_1, B_1, T_1, \alpha_1\beta_1\gamma_1$  auf einem Kegelschnitt  $\mathcal{K}$ , auf dem daher auch die Pole von  $l$  bezüglich der conischen Polaren aller Punkte von  $l_1$  liegen müssen. Der Kegelschnitt, welcher die Pole von  $l_1$  bezüglich der conischen Polaren der Punkte von  $l$  enthält, muß aber mit jenem zusammenfallen, weil er mit ihm die 6 Punkte  $\alpha\beta\gamma\alpha_1\beta_1\gamma_1$  gemein hat.

33. Die gemischte Poloconik 2er Geraden  $l$  und  $l_1$  ist der geometrische Ort der Punkte, in Bezug auf deren conische Polaren  $l$  und  $l_1$  conjugirte Gerade sind. (Cremona art. 125.a.)

Sei  $\mathcal{K}$  die gemischte Poloconik von  $l, l_1$ ,  $R$  ein beliebiger Punkt auf ihr,  $\sigma$  seine conische Polare, dann ist  $R$  zugleich der Pol von  $l$  in Bezug auf die conische Polare  $\sigma_1$  eines Punktes  $S_1$  von  $l_1$  und auch von  $l_1$  bezüglich der conischen Polare  $\sigma$  eines Punktes  $S$  von  $l$ . Daher ist  $l$  die Polare von  $R$  bezüglich  $\sigma_1$  und also (cfr. 23.) auch von  $S_1$  bezüglich  $\sigma$ ; ebenso ist  $l_1$  die Polare von  $S$  bezüglich  $\sigma$ . Da aber  $S$  auf  $l$  und  $S_1$  auf  $l_1$  liegt, so sind  $l$  und  $l_1$  in Bezug auf  $\sigma$  conjugirte Gerade.

34. Ist  $M$  irgend ein Punkt der gemischten geraden Polare  $p_{1,2}$  zweier Punkte  $P_1$  und  $P_2$ , so geht die Polare von  $P_1$  bezüglich der conischen Polare  $\mu$  von  $M$  durch  $P_2$  und umgekehrt. (Cremona art. 69,d.)

Die conischen Polaren von  $P_1, P_2$  seien  $x_1, x_2$ , so fallen (cfr. 23.) die Polaren von  $P_1$  bezüglich  $x_2$  und von  $P_2$  bezüglich  $x_1$  in eine Gerade  $p_{1,2}$  zusammen. Ist  $M$  ein beliebiger Punkt von  $p_{1,2}$ ,  $\mu$  seine conische Polare, so liegt  $M$  auf der Polare  $p_{1,2}$  von  $P_1$  bezüglich  $x_2$ , also muß die Polare  $m_1$  von  $M$  bezüglich  $x_2$  durch  $P_1$  gehen. Es fällt aber (cfr. 23.)  $m_1$  mit der Polare von  $P_2$  bezüglich  $\mu$  zusammen, also liegt  $P_1$  auf der Polare von  $P_2$  bezüglich  $\mu$ .

35. Die gemischte gerade Polare zweier Punkte  $P_1$  und  $P_2$  ist der geometrische Ort der Punkte, in Bezug auf deren conische Polaren  $P_1$  und  $P_2$  conjugirte Punkte sind. (Cremona art. 123.)

Die gemischte gerade Polare von  $P_1$  und  $P_2$  sei  $p_{1,2}$ ,  $MM_1M_2 \dots$  beliebige ihrer Punkte, so bilden deren conische Polaren  $\mu\mu_1\mu_2 \dots$  ein Büschel. Es liegt aber  $P_1$  auf den Polaren von  $P_2$  bezüglich aller Kegelschnitte  $\mu$ , also sind  $P_1$  und  $P_2$  conjugirte Punkte in Bezug auf das Büschel.

36. Die gemischte gerade Polare zweier Punkte  $M$  und  $O$  geht durch die beiden Punkte, in welchen die geraden Polaren von  $M$  und  $O$  die Poloconik von  $MO$  berühren. (Cremona art. 124.)

Die Linie  $MO$  bezeichne man mit  $l$  und  $x$  sei eine conische Polare durch  $M, P$  ihr Pol; die Schnittpunkte von  $x$  mit  $l$  seien  $MN$ ; ferner  $OO'$  harmonisch zu  $MN$ , dann liegt  $P$  auf der ge-

mischten geraden Polare von  $OO'$  und auf den geraden Polaren von  $M$  und  $N$ . — Fallen  $M$  und  $N$  in einen Punkt zusammen, berührt also  $x$  die Gerade  $l$  in  $M$ , dann muß der Pol  $P$  von  $x$  auf der Poloconik von  $l$  liegen. Da  $MNOO'$  harmonisch liegen, so muß auch für diesen Fall  $O'$  mit  $MN$  zusammen fallen, dann sind also  $M$  und  $O$  2 conjugirte Punkte in Bezug auf  $x$  und ihre gemischte gerade Polare muß durch  $P$  gehen.  $P$  liegt aber auf der Poloconik von  $l$  (cfr. 26.) und diese wird in ihm von der geraden Polare von  $M$  berührt. Die gemischte gerade Polare von  $MO$  geht also durch den Punkt, in welchem die gerade Polare von  $M$  die Poloconik von  $l$  berührt und muß ebenso durch den Punkt gehen, in welchem die gerade Polare von  $O$  diese Poloconik berührt.

37. Ist  $m$  irgend eine Gerade des gemischten Pols  $P_{1,2}$  zweier Geraden  $l_1$  und  $l_2$ , so liegt der Pol von  $l_1$  bezüglich der Poloconik  $M$  von  $m$  auf  $l_2$  und umgekehrt.

$C_1$  und  $C_2$  seien die Poloconiken von  $l_1$  und  $l_2$  und  $P_{1,2}$  der Pol von  $l_1$  bezüglich  $C_2$ , also auch von  $l_2$  bezüglich  $C_1$ . (24. c.) Da  $m$  durch den Pol  $P_{1,2}$  von  $l_1$  in Bezug auf  $C_2$  geht, so muß der Pol  $M_1$  von  $m$  bezüglich  $C_2$  auf  $l_1$  liegen. Es fällt aber (24. c.)  $M_1$  mit dem Pol von  $l_2$  in Bezug auf  $M$  zusammen, also geht  $l_1$  durch den Pol von  $l_2$  bezüglich  $M$ .

38. Durch den gemischten Pol  $P_{1,2}$  zweier Geraden  $l_1$  und  $l_2$  gehen alle die Geraden, in Bezug auf deren Poloconiken  $l_1$  und  $l_2$  conjugirte Gerade sind.

$mm, m_2, \dots$  seien beliebige Gerade durch  $P_{1,2}$ , so bilden ihre Poloconiken  $MM, M_2, \dots$  eine Regelschnittschaar (17.). Es geht aber  $l_1$  durch den Pol von  $l_2$  bezüglich aller  $M \dots$ , (cfr. 37.), also sind  $l_1$  und  $l_2$  conjugirte Gerade.

39. Der gemischte Pol zweier Geraden  $m$  und  $o$  ist der Durchschnitt der beiden Geraden, welche in den Polen von  $m$  und  $o$  bezüglich  $ABC$  die conische Polare vom Schnittpunkt  $(m, o)$  berühren.

Den Punkt  $(mo)$  bezeichne man mit  $L$  und  $R$  sei die Poloconik irgend einer Geraden  $k$  und sie berühre  $m$ . Die Tangenten von  $L$  an  $R$  sind  $m$  und  $n$ , ferner die Geraden  $oo'$  harmonisch mit  $mn$ . Wenn  $mn$  in eine Gerade zusammenfallen, dann muß  $k$  die conische Polare von  $L$  berühren, weil  $L$  in diesem Fall auf  $R$  liegt. (cfr. 25.) Dann muß auch, da  $mnoo'$  4 harmonische Strahlen sind,  $o'$  mit  $mn$  zusammenfallen, also sind  $m$  und  $o$  conjugirte Strahlen in Bezug auf  $R$  und ihr gemischter Pol muß (nach 38.) auf  $k$  liegen. Es berührt aber  $k$  die conische Polare von  $L$  in dem Pol von  $m$  bezüglich  $ABC$  (cfr. 24. b.), also liegt der gemischte Pol von  $m$  und  $o$  auf der Linie, welche in dem Pol von  $m$  die conische Polare von  $L$  berührt und muß ebenso auf der Linie liegen, welche dieselbe conische Polare im Pol von  $o$  bezüglich  $ABC$  berührt.

40. Der geometrische Ort für die Polaren je eines von 2 Punkten  $P$  und  $P_1$  in Bezug auf die Poloconiken aller Geraden durch den andern ist ein Regelschnitt, welcher die 6 Tangenten in den Ecken  $ABC$  an die conischen Polaren von  $P$  und  $P_1$  berührt. Gemischte conische Polare von  $P$  und  $P_1$ .



Durch einen Punkt  $G$  seien die Geraden  $g_1, g_2, \dots$  gezogen, welche die Seiten des Dreiecks  $ABC$  in den Punkten  $\alpha^1 \beta^1 \gamma^1, \alpha_1^1 \beta_1^1 \gamma_1^1, \alpha_2^1 \beta_2^1 \gamma_2^1, \dots$  schneiden, dann sind die Strahlenbüschel  $A(\alpha^1 \alpha_1^1 \alpha_2^1 \dots), B(\beta^1 \beta_1^1 \beta_2^1 \dots), C(\gamma^1 \gamma_1^1 \gamma_2^1 \dots)$  projectivisch, also auch die Punktreihen  $A\alpha^1(C\gamma^1, C\gamma_1^1, C\gamma_2^1, \dots)$  und  $C\gamma^1(A\alpha^1, A\alpha_1^1, A\alpha_2^1, \dots)$ . Diese sind überdies in perspectivischer Lage und daher schneiden sich die Verbindungslinien entsprechender Punkte in einem Punkt. Es sind ferner die Schnittpunkte von  $A\alpha^1$  mit  $CG$  und  $C\gamma^1$  mit  $AC$ , von  $A\alpha^1$  mit  $CA$  und  $C\gamma^1$  mit  $AG$  entsprechende Punktpaare. Da deren Verbindungslinien sich in  $G$  schneiden, so ist  $G$  der perspectivische Durchschnittpunkt. Daraus folgt, daß das Sechseck  $A\alpha^1, B\beta^1, C\gamma^1, A\alpha_1^1, B\beta_1^1, C\gamma_1^1$  ein Brianchon'sches ist und daß sich in dasselbe ein Kegelschnitt  $K$  konstruiren läßt.

**Fig. V.** Zieht man durch irgend 2 Punkte  $P$  und  $P_1$  die Geraden  $PA, PB, PC, P_1A, P_1B, P_1C$ , welche die Seiten in  $\alpha\beta\gamma, \alpha_1\beta_1\gamma_1$  schneiden und konstruirt in Bezug auf die Ecken die harmonischen Gegenpunkte  $\alpha^1\beta^1\gamma^1, \alpha_1^1\beta_1^1\gamma_1^1$ , so giebt es einen Kegelschnitt  $K$ , welcher die 6 Linien  $A\alpha^1, B\beta^1, C\gamma^1, A\alpha_1^1, B\beta_1^1, C\gamma_1^1$  berührt. Die Poloconik von  $A\alpha$  ist das Punktpaar  $(A\alpha^1)$  (cfr. 16. a.), folglich ist  $A\alpha^1$  auch die Polare von  $P_1$  bezüglich  $(A\alpha^1)$ ; ebenso sind  $B\beta^1$  und  $C\gamma^1$  die Polaren von  $P_1$  bezüglich der Punktpaare  $(B\beta^1)$  und  $(C\gamma^1)$ , welche die Poloconiken der Geraden  $B\beta$  und  $C\gamma$  sind. — Die Linien  $AP_1, C\gamma_1^1$  und  $B\beta_1^1$  schneiden sich in einem Punkt  $U_1$  (cfr. 1.), zieht man dann  $P_1U_1$  oder  $a$ , so ist  $P_1$  der Pol dieser Linie in Bezug auf die Poloconiken der Geraden  $A\alpha_1^1$ , denn diese Poloconik ist das Punktpaar  $(A\alpha_1^1)$  und  $A\alpha_1^1, U_1, P_1$  sind 4 harmonische Punkte, folglich ist auch (cfr. 24. c.)  $P_1$  der Pol von  $A\alpha_1^1$  in Bezug auf die Poloconik von  $a$ , oder  $A\alpha_1^1$  ist die Polare von  $P_1$ . Auf dieselbe Weise läßt sich zeigen, daß  $B\beta_1^1$  und  $C\gamma_1^1$  die Polaren von  $P_1$  bezüglich der Poloconiken der Linien  $b$  und  $c$  durch  $P$  sind, also fällt der Kegelschnitt  $K_1$ , welcher die Polaren von  $P_1$  bezüglich der Poloconiken aller durch  $P$  gelegten Geraden umhüllt, mit dem Kegelschnitt  $K$  zusammen. Mit diesem fällt, was sich auf dieselbe Art nachweisen läßt, auch der Kegelschnitt  $K$  zusammen, welcher die Polaren von  $P$  in Bezug auf die Poloconiken aller Geraden, die sich durch  $P_1$  ziehen lassen, zusammen, d. h. die Kegelschnitte  $K_1$  und  $K$  sind identisch.

40. a. Die gemischte conische Polare 2er Punkte  $P$  und  $P_1$  ist der geometrische Ort der Geraden, in Bezug auf deren Poloconiken  $P$  und  $P_1$  conjugirte Punkte sind.

Sei  $K$  die gemischte conische Polare von  $P$  und  $P_1$ ,  $r$  eine ihrer Tangenten,  $R$  deren Poloconik, dann ist  $r$  zugleich die Polare von  $P$  in Bezug auf die Poloconik  $S_1$  eines Strahles  $s_1$  von  $P_1$  und auch von  $P_1$  in Bezug auf die Poloconik  $S$  eines Strahles  $s$  von  $P$ . Daher ist  $P$  der Pol von  $r$  bezüglich  $S_1$  und daher auch (cfr. 24. c.) von  $s_1$  bezüglich  $R$ , und  $P_1$  ist auch der Pol von  $s$  bezüglich  $R$ , d. h.  $P$  und  $P_1$  sind in Bezug auf  $R$  conjugirte Punkte.

## II. Die Polaren einer Curve III. Ordnung mit 2 Doppelpunkten.

41. Eine Curve III. O. mit zwei Doppelpunkten besteht aus einem Regelschnitt  $K$  und einer Geraden  $g$ .

42. Die gerade Polare eines Punktes  $O$  in Bezug auf die Curve  $(K, g)$  fällt zusammen mit der geraden Polare von  $O$  bezüglich eines Dreiecks  $ABC$ , dessen eine Seite  $g$  ist und dessen andere Seiten die Tangenten in den Schnittpunkten einer beliebig durch  $O$  gelegten Transversale sind.

Man lege (Fig. II.) durch  $O$  eine beliebige Gerade, welche  $g$  in  $P$ ,  $K$  in  $MN$  schneidet, ziehe in  $MN$  Tangenten, die sich in  $C$  und  $g$  in  $AB$  schneiden, ziehe  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$  und nenne ihre Schnittpunkte mit den Seiten  $\alpha\beta\gamma$ , construiere die harmonischen Gegenpunkte  $\alpha'\beta'\gamma'$  in Bezug auf die Ecken, so ist  $\gamma'C$  die gerade Polare von  $O$  bezüglich  $ABC$ . Nun sind  $\gamma'O$ ,  $\gamma'C$ ,  $\gamma'B$ ,  $\gamma'\beta$  4 harmonische Strahlen und da die ersten drei nur von der Lage von  $O$  gegen  $K$  und  $g$  abhängig sind, so ist  $\gamma'\beta$  unabhängig vom Dreieck  $ABC$ , folglich ist auch  $\alpha'\beta'\gamma'$  als 4ter harmonischer Strahl zu  $\gamma'A$ ,  $\gamma'C$ ,  $\gamma'\beta$  unabhängig vom Dreieck  $ABC$  d. h. von der Lage der Transversale  $MNP$ . Die Linie  $\alpha'\beta'\gamma'$  schneidet  $MNP$  im harmonischen Mittelpunkt  $I$ . Grades bezüglich  $O$  und ebenso jede andere Transversale durch  $O$  und ist also die gerade Polare von  $O$  bezüglich  $(K, g)$ .

43. Die geraden Polaren aller Punkte einer Geraden  $l$  in Bezug auf  $(K, g)$  werden von einem Regelschnitt  $\mathcal{C}$  umhüllt, der Poloconik von  $l$  in Bezug auf  $(K, g)$ . - Sind  $MNP$  die Schnittpunkte von  $l$  mit  $K$  und  $g$ ,  $ABC$  das Dreieck, dessen Seiten die Tangenten in  $M, N$  und die Gerade  $g$  sind, so berührt  $\mathcal{C}$  diese Seiten in den harmonischen Gegenpunkten  $M'N'P'$  von  $MNP$ .

Beweis folgt aus 16. und 42.

44. Zieht man durch einen Punkt  $O$  beliebige Transversalen  $l_1, l_2 \dots$  und bestimmt auf jeder die harmonischen Mittelpunkte des zweiten Grades für ihre Schnittpunkte mit  $(K, g)$  bezüglich  $O$ , so liegen auf irgend einer Geraden  $m$ , die nicht durch  $O$  geht, nur 2 d. h. sie erfüllen einen Regelschnitt, die conische Polare von  $O$ .

Ist  $\mathcal{M}$  die Poloconik von  $m$ ,  $OA$  und  $OB$  die beiden Tangenten von  $O$  an dieselben, so müssen die Pole  $A_1$  und  $B_1$  derselben auf  $m$  die einzigen Punkte sein, deren gerade Polaren durch  $O$  gehen; d. h. auf der Transversale  $OA_1$  ist für ihre Schnittpunkte mit  $(K, g)$   $O$  ein harmonischer Mittelpunkt ersten Grades in Bezug auf  $A_1$ , also (cfr. 14.)  $A_1$  einer des 2ten Grades bezüglich  $O$ .

45. Alle conischen Polaren gehen durch die Doppelpunkte der Curve  $(K, g)$ .

Fig. II.  $K$  und  $g$  mögen sich  $A$  und  $B$  schneiden. Zieht man dann durch einen beliebigen Punkt  $O$



die Transversale  $OM$ , so fallen 2 der Schnittpunkte in  $M$  zusammen, also auch einer der harmonischen Mittelpunkte II. Grades.

46. Jede Gerade hat 2 Pole, für welche sie die gerade Polare bezüglich  $(K, g)$  ist.

Die Gerade sei  $p$  oder (Fig. II.)  $\alpha'\beta'\gamma'$ , dann liegt ihr Pol  $O$  bezüglich  $(K, g)$  auf der Polare  $OC_1$  des Durchschnits  $\gamma'$  von  $p$  und  $g$  bezüglich  $K$  und falls  $p$  mehrere Pole in Bezug auf  $(K, g)$  hat, so müssen sie sämtlich auf  $OC_1$  liegen. Da  $\gamma'$  auf der geraden Polare derselben liegt, so muß (cfr. 14.) die conische Polare von  $\gamma'$  durch sie hindurch gehen. Da sie  $OC_1$  aber nur in 2 Punkten schneidet, so hat  $p$  nur zwei Pole.

47. Die conischen Polaren aller Punkte einer Geraden  $l$  bezüglich  $(K, g)$  bilden ein Büschel.

Die 4 Basispunkte sind nämlich die Doppelpunkte (cfr. 45.) und die Pole von  $l$  bezüglich  $(K, g)$ .

48. Der geometrische Ort für die Pole aller Geraden, die sich in einem Punkt  $O$  schneiden, ist die conische Polare dieses Punktes.

Denn die gerade Polare eines jeden dieser Pole geht durch  $O$ .

49. Die gerade Polare eines Punktes von  $g$  ist  $g$  selbst, die eines Punktes von  $K$  ist die Tangente in diesem Punkt an  $K$ .

Folgt unmittelbar aus 42.

50. Die Pole aller Geraden bezüglich  $(K, g)$ , welche sich in einem Punkt von  $g$  schneiden, liegen auf der Polare dieses Punktes bezüglich  $K$  und bilden eine Punktinvolution. — Die conische Polare eines Punktes von  $g$  ist das Geradenpaar, welches aus der Polare dieses Punktes bezüglich  $K$  und aus  $g$  selbst besteht.

Ist  $\gamma'$  der Schnittpunkt aller Geraden auf  $g$ , so liegen (Fig. II.) ihre Pole bezüglich  $(K, g)$  auf der Polare  $C_1O$  von  $\gamma'$  in Bezug  $K$ . — Da die geraden Polaren aller Punkte von  $C_1O$  sich daher in  $\gamma'$  schneiden und die gerade Polare eines jeden Punktes von  $g$  diese Gerade selbst ist, so ist das Geradenpaar  $(C_1O, g)$  die conische Polare von  $\gamma'$ .

51. Die conische Polare irgend eines Punktes  $O$  geht durch die Berührungspunkte der von  $O$  an  $K$  gezogenen Tangenten.

Folgt aus 15. — Liegt  $O$  auf  $K$ , so fallen die beiden Berührungspunkte zusammen, daher folgt:

52. Die conische Polare eines Punktes  $O$  von  $K$  berührt  $K$  in  $O$  und trennt  $O$  von den beiden übrigen Schnittpunkten einer jeden durch  $O$  gezogenen Transversale von diesem Punkt harmonisch.

Der zweite Theil des Satzes folgt aus 15a.

53. Die geraden Polaren aller Punkte einer Geraden  $l$ , welche durch einen der Schnittpunkte  $M$  von  $K$  und  $g$  geht, schneiden sich in einem Punkt.

Ist  $P$  ein beliebiger Punkt,  $\kappa$  seine conische Polare, so schneidet  $\kappa$  außer in  $A$  die  $l$  nur noch in einem Punkt, dessen gerade Polare durch  $P$  geht.

54. Die gerade Polare eines Punktes ist zugleich die Polare bezüglich seiner conischen Polare.

Folgt aus 19.

55. Die Poloconik  $\mathcal{C}$  einer Geraden  $l$  bezüglich  $(K, g)$  ist der Ort der Pole von  $l$  bezüglich der conischen Polaren der Punkte dieser Linien.

Fig. III. Die Gerade  $l$  schneide  $g$  in  $P$ ,  $K$  in  $MN$ ,  $K$  und  $g$  treffen sich in  $A$  und  $B$ , die Tangenten in  $MN$  treffen sich und die  $g$  in  $CAB$ . Ist dann  $P'$  der harmonische Gegenpunkt von  $P$  in Bezug auf  $AB$  und also auch auf  $AB$ , so ist  $CP'$  die Polare von  $P$  bezüglich  $K$ . Da nun die Strahlen  $P'$  ( $PCNM$ ) harmonische sind, so folgt, daß auch die Punkte  $BCM'M$  4 harmonische Punkte sind. Die Poloconik  $\mathcal{C}$  von  $l$  berührt die Seiten von  $ABC$  in den in Beziehung auf die Ecken harmonischen Gegenpunkten  $M'N'P'$  von  $MNP$ . Die conische Polare  $\mu$  von  $M$  berührt  $K$  und  $BC$  in  $M$  und trennt  $NP$  von  $M$  in  $M''$  harmonisch. Deshalb muß, da  $\mu$  durch  $AB$  geht, die Polare von  $P$  in Beziehung auf  $\mu$  die Linie  $P'N$  sein. Zieht man in  $M''$  eine Tangente an  $\mu$ , so muß diese durch  $M'$  und  $A$  gehen, also ist  $M'$  der Pol von  $MN$  für  $\mu$  und ebenso  $N'$  der Pol von  $MN$  für die conische Polare  $\nu$  von  $N$ . Ferner ist  $P'$  der Pol von  $MN$  für die conische Polare  $\pi$  von  $P$ , denn diese besteht aus dem Geradenpaar  $(AB, CP')$ . Die conischen Polaren aller Punkte von  $l$  bilden ein Büschel, dessen einzelne Kegelschnitte  $BC$  in Punkten einer Involution schneiden. Da das eine Geradenpaar  $(AB, CP')$  dieses Büschels durch  $BC$  geht und  $M$  der eine Doppelpunkt der Involution ist, so muß  $M'$  der andere sein. Ebenso entsteht auf  $AC$  eine Involution, deren Doppelpunkte  $NN'$  sind. Ist nun  $O$  ein beliebiger Punkt auf  $l$  und  $o$  seine conische Polare, so ist  $(\mu\nu\pi o) \pi (MNPO)$ . Sei  $H$  der Pol von  $l$  für  $o$ , dann sind  $HM'$ ,  $HN'$ ,  $HP'$  die Polaren von  $MNP$  für  $o$ . Die Pole von  $l$  bezüglich der conischen Polaren aller Punkte von  $l$  liegen auf einem Kegelschnitt  $\mathcal{K}$ , auf dem also auch  $M'N'P'$   $H$  liegen, und es ist  $(M'N'P'H) \pi (\mu\nu\pi o) \pi H (M'N'P'H)$ , wenn  $H H$  die Tangente in  $H$  an  $\mathcal{K}$  bedeutet. Das Büschel  $(\mu\nu\pi o)$  ist aber auch projectivisch zu  $MNPO$  und zu dem Büschel der Polaren  $H (M'N'P'x)$  dieser Punkte, also ist  $H (M'N'P'H) \pi H (M'N'P'x)$ , d. h. die Tangente in  $H$  an  $\mathcal{K}$  ist die Polare von  $O$  für  $o$  oder die gerade Polare von  $O$ . Es berühren also die geraden Polaren der Punkte von  $l$  den Kegelschnitt  $\mathcal{K}$ , daher muß dieser mit der Poloconik  $\mathcal{C}$  von  $l$  zusammenfallen und zwar ist der Berührungspunkt der Pol von  $l$  für die conische Polare des Punktes, dessen gerade Polare die Tangente ist.

56. Sind  $o$  und  $o_1$  die conischen Polaren zweier Punkte  $O$  und  $O_1$ , so fallen die Polaren von  $O$  für  $o_1$  und von  $O_1$  für  $o$  zusammen.

Ist  $O_1$  ein anderer Punkt von  $l$ ,  $o_1$  seine conische Polare,  $H_1$  der Pol von  $l$  für  $o_1$ , dann ist  $H (M'N'P'H) \pi H_1 (M'N'P'H) \pi (MNPO)$  und auch projectivisch den Polaren der Punkte



MNPO bezüglich  $o_1$ , also  $\pi H_1(M'N'P'x)$ , d. h.  $H_1H$  ist die Polare von O für  $o_1$  und ebenso von  $O_1$  für o.

57. Zieht man in einem der Doppelpunkte der Curve  $(K, g)$ , etwa in A, die Tangente an die conische Polare o eines Punktes O und die Linie AO, so werden sie durch g und die Tangente t in A an K harmonisch getrennt.

Das Linienpaar  $(g, t)$  ist die conische Polare von A. Die Polare von O bezüglich  $(g, t)$  fällt aber mit der Polare von A bezüglich o zusammen. Da aber die letztere die Tangente in A an o ist und von g und t durch AO harmonisch getrennt wird, so folgt der Satz.

58. Die conischen Polaren  $oo_1o_2 \dots$  eines Punktes O in Bezug auf alle Curven III. Ordnung, die aus derselben Geraden g und je einem Kegelschnitt  $KK_1K_2 \dots$  eines Büschels bestehen, bilden selbst ein Kegelschnittbüschel.

Unter den Kegelschnitten des Büschels giebt es 3 Geradenpaare, deren Scheitel ABC sein mögen, dann bilden die conischen Polaren  $\alpha\alpha_1\alpha_2 \dots, \beta\beta_1\beta_2 \dots, \gamma\gamma_1\gamma_2 \dots$  dieser Punkte bezüglich  $(K, g), (K_1, g), (K_2, g), \dots$  3 Kegelschnittbüschel. Sei O ein beliebiger Punkt,  $\omega\omega_1\omega_2 \dots$  seine conischen Polaren, dann fällt nach 56. die Polare von O bezüglich  $\alpha$  mit der Polaren von A bezüglich  $\omega$  zusammen. Die Polaren von O bezüglich der Kegelschnitte  $\alpha\alpha_1\alpha_2 \dots, \beta\beta_1\beta_2 \dots, \gamma\gamma_1\gamma_2 \dots$  schneiden sich in 3 Punkten A, B, C, in denen sich daher auch die Polaren von ABC bezüglich der Kegelschnitte  $\omega\omega_1\omega_2 \dots$  schneiden müssen, es sind also AA, BB, CC 3 Paar conjugirter Punkte in Bezug auf die conischen Polaren  $\omega\omega_1\omega_2 \dots$ . Auf der Linie g entsteht durch die Kegelschnitte  $KK_1K_2 \dots$  eine Punktinvolution, deren Doppelpunkte MM sein mögen, dann sind die conischen Polaren von M Geradenpaare, deren gemeinschaftlicher Scheitel M ist. Es müssen also durch M die Polaren von O bezüglich sämtlicher Geradenpaare, also auch die Polaren von M in Bezug auf  $\omega\omega_1\omega_2 \dots$  durchgehen. Da diese letztere also 4 Paar conjugirter Punkte haben, so bilden sie (cfr. Schröter, Steiner's Vorlesungen, II. pag. 469) ein Kegelschnittbüschel.

### III. Die Polaren einer Curve III. Ordnung mit einem Doppelpunkt.

59. Jedem Punkt P in der Ebene eines Kegelschnittbüschels entspricht ein Punkt P, in welchem sich die Polaren von P in Bezug auf alle Kegelschnitte des Büschels schneiden, und dem Punkt P entspricht wieder P, weil auch alle Polaren von P sich in P schneiden. Man nennt diese beiden Punkte conjugirte Punkte in Bezug auf das Kegelschnittbüschel. Die 3 Geradenpaare des Büschels haben als Scheitel die 3 gemeinschaftlichen Tripelpunkte ABC des Büschels. Die Polaren aller Punkte einer der Seiten des Dreiecks ABC z. B. BC schneiden sich in A, die Polaren von A aber fallen mit BC zusammen. Der Punkt A hat daher jeden Punkt von BC zu seinem conjugirten, und dasselbe gilt von den andern Ecken des Dreiecks der Tripelpunkte. Jedem Basispunkt des Büschels entspricht als conjugirter Punkt er selbst, weil die Polaren eines solchen die Tangenten in ihm an die

einzelnen Kegelschnitte des Büschels sind. Eine solche Beziehung zwischen zwei Punktsystemen, so daß jeder Punkt  $P$  des einen Systems der conjugirte eines Punktes  $P$  im andern System und dieser letztere  $P$  wieder der conjugirte desselben Punktes  $P$  im ersten System ist, nennt man eine Steiner'sche Verwandschaft (Dürge. Die ebenen Curven III. D. pag. 121.) Sie bezieht sich stets auf ein bestimmtes Kegelschnittbüschel, dessen Basispunkte daher die Basis der Steiner'schen Verwandschaft genannt werden, während die dem Büschel gemeinschaftlichen Tripelpunkte die Hauptpunkte der Steiner'schen Verwandschaft heißen.

60. Jeder Geraden entspricht in einer Steiner'schen Verwandschaft ein Kegelschnitt, welcher durch die Hauptpunkte geht und jedem Kegelschnitt durch die Hauptpunkte entspricht eine Gerade.

Die Gerade sei  $l$ , die Hauptpunkte  $ABC$ . Seien  $PP_1$  2 Punkte von  $l$ , so treffen sich ihre Polaren in den beiden conjugirten Punkten und bilden 2 projectivische Kegelschnittbüschel, die einen Kegelschnitt  $K$  erzeugen, auf dem die Pole der Geraden  $l$  in Beziehung auf alle Kegelschnitte des Büschels liegen müssen, denn die Polaren von  $P$  und  $P_1$  bezüglich desselben Kegelschnitts sind entsprechende Strahlen jener projectivischen Büschel und schneiden sich in ihrem Pol. Die Punkte  $ABC$  sind aber die Pole von  $l$  in Bezug auf die 3 Geradenpaare, also liegen sie auch auf dem Kegelschnitt. Auf diesem Kegelschnitt liegen auch die Punkte  $P$  und  $P_1$ . Da derselbe sich nicht ändert, wenn man statt  $PP_1$  beliebige andere Punkte auf  $l$  wählt, so folgt, daß auf jenem Kegelschnitt die conjugirten Punkte aller Punkte von  $l$  liegen.

Anderer Beweis. Die Geradenpaare des der Steiner'schen Verwandschaft zugehörigen Büschels seien  $aa_1, bb_1, cc_1$ ; ihre Scheitel  $ABC$  die Hauptpunkte. Die Polaren aller Punkte von  $l$  in Bezug auf  $aa_1, bb_1, cc_1$  bilden 3 projectivische Strahlenbüschel, von denen je 3 entsprechende Strahlen sich in einem Punkt schneiden müssen. Alle diese Punkte sind die conjugirten der Punkte auf  $l$ , deren Polaren sich eben in jenen schneiden und liegen wegen der Projectivität der Büschel auf einem Kegelschnitt.

Beweis der Umkehrung. Sei  $K$  ein Kegelschnitt durch die Hauptpunkte  $ABC, PP_1, P_2 \dots$  beliebige Punkte desselben, so bilden ihre Polaren in Bezug auf  $aa_1$  und  $bb_1$  zwei projectivische Strahlenbüschel um  $A$  und  $B$ , in denen der Strahl  $AB$  sich selbst entspricht, also sind die Büschel in perspectivischer Lage und die Schnittpunkte entsprechender Strahlen liegen auf einer Geraden.

61. Jeder Geraden durch einen der Hauptpunkte entspricht wieder eine Gerade durch denselben Hauptpunkt.

Die Gerade sei  $l$  und gehe durch den Hauptpunkt  $A$ , dann liegen alle Punkte, welche den Punkten auf  $l$  conjugirt sind auf dem vierten harmonischen Strahl zu  $a, a_1, l$ , welcher  $l$  zugeordnet ist.

62. Jedem Kegelschnitt, welcher durch zwei Hauptpunkte geht, entspricht wieder ein Kegelschnitt durch dieselben Hauptpunkte.



Der Kegelschnitt  $K$  sei durch die Hauptpunkte  $BC$  gelegt, dann bilden die Polaren der Punkte von  $K$  in  $B$  und  $C$  zwei projectivische Strahlenbüschel, und diese erzeugen, da der gemeinschaftliche Strahl  $BC$  sich nicht selbst entspricht, einen Kegelschnitt durch  $B$  und  $C$ .

63. Jeder durch die drei Hauptpunkte gehenden Curve III. O., welche in einem derselben  $A$  einen Doppelpunkt hat, entspricht ein Kegelschnitt durch den Doppelpunkt.

Die Curve sei  $C^{(3)}$ , dann schneidet jede durch  $A$  gelegte Gerade  $g$  diese noch in einem Punkt  $P$ , beiden entsprechen die Gerade  $g$  und der Punkt  $P$  auf ihr. — Jeder Geraden  $g$  durch einen der andern Hauptpunkte und ihren Schnittpunkten  $P$  und  $P_1$  mit  $C^{(3)}$  entsprechen eine Gerade  $g$  und die Punkte  $P$  und  $P_1$  auf derselben. Die Gerade  $BC$  selbst schneide  $C^{(3)}$  in  $A$ , dann ist  $A$  der conjugirte Punkt von  $A$ . — Jeder beliebigen Geraden  $g$ , und den Punkten  $PP_1, P_2 \dots$  in welchen sie  $C^{(3)}$  schneidet, entsprechen ein Kegelschnitt  $\gamma$  durch  $ABC$  und die Punkte  $PP_1, P_2$  auf  $\gamma$ . — Die der  $C^{(3)}$  entsprechende Curve ist also von der Beschaffenheit, daß sie durch  $A$  geht, von jeder durch  $A$  gelegten Linie in einem Punkt, von jeder durch  $B$  oder  $C$  gelegten in 2 Punkten, von jedem durch  $ABC$  gelegten Kegelschnitt in 3 Punkten geschnitten wird, also selbst ein Kegelschnitt, welcher durch den Doppelpunkt  $A$  geht.

64. Ein Kegelschnittbüschel wird durch einen Kegelschnitt, welcher durch 2 Basispunkte geht, in Punktpaaren einer Involution geschnitten.

Die Basispunkte der Kegelschnitte  $xx, x_2 \dots$  seien  $ABCD$  und  $K$  sei ein beliebiger Kegelschnitt durch  $BC$ , welcher  $xx, x_2 \dots$  in  $EF, E_1 F_1, E_2 F_2, \dots$  schneidet. Wir wählen  $ABC$  als Hauptpunkte einer Steiner'schen Verwandtschaft, dann entspricht dem  $K$  ein Kegelschnitt  $K$ , den  $xx, x_2 \dots$  entsprechen Strahlen eines Büschels, dessen Scheitel der dem  $D$  entsprechende Punkt  $D$  ist und diese Strahlen schneiden  $K$  in den Punkten  $EF, E_1 F_1, E_2 F_2, \dots$ , welches die entsprechenden von  $EF, E_1 F_1, E_2 F_2, \dots$  sind. Der Strahleninvolution  $B (EF, E_1 F_1, E_2 F_2, \dots)$  entspricht also die Involution  $B (EF, E_1 F_1, E_2 F_2, \dots)$ . —

Die Linien  $EF, E_1 F_1, E_2 F_2, \dots$  schneiden sich also in einem Punkt, durch den auch  $AD$  gehen muß, weil das Geradenpaar  $BC, AD$  auch zum Kegelschnittbüschel gehört.

65. Legt man durch je 2 Punkte eines Paares einer Involution auf einen Kegelschnitt  $K$  Kegelschnitte, welche durch 3 feste Punkte  $ABC$  gehen, von denen  $BC$  auf  $K$  liegen, so schneiden sie sich noch in einem 4ten Punkt  $D$ .

Die Punktpaare der Involution auf  $K$  seien  $EF, E_1 F_1, E_2 F_2, \dots$ . Man lege durch  $ABCE$  und  $ABCE_1 F_1$  2 Kegelschnitte  $xx$ , die sich in  $D$  schneiden mögen und durch  $ABCDE_2$  einen dritten, welcher  $K$  noch in  $X$  trifft, dann müssen  $X$  und  $F_2$  zusammenfallen, weil  $EFE_1 F_1 E_2 F_2$  und  $EFE_1 F_1 E_2 X$  je eine Punktinvolution bilden. —

Ist  $P$  der Schnittpunkt von  $EF$  und  $E_1 F_1$ , so liegen auch  $PAD$  in einer Geraden.

66. Legt man durch je 2 Punkte eines Paares  $EF, E_1 F_1, E_2 F_2, \dots$  einer In-

volution auf einem Regelschnitt  $K$  Regelschnitte, welche durch 3 feste Punkte  $ABD$  gehen, von denen  $B$  auf  $K$  liegt, und  $AD$  in seiner Geraden mit dem Durchschnitt  $P$  von  $EF$  und  $E_1 F_1$  liegen, so schneiden sie sich noch in einem vierten Punkt  $C$ , der auch auf  $K$  liegt.

Sind wieder  $EF, E_1 F_1, E_2 F_2, \dots$  die Punktpaare der Involution auf  $K$  und man legt durch  $ABDEF$  einen Regelschnitt  $\alpha$ , welcher  $K$  in  $C$  schneidet, und durch  $ABCE, F_1, ABCE, F_2, \dots$  Regelschnitte  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ , so müssen sich alle nach 65. in  $D$  treffen. —

67. Eine Curve III. D. mit einem Doppelpunkt wird von jedem Regelschnitt, der nicht durch den Doppelpunkt geht, in 6 Punkten geschnitten.

Die Curve sei  $C^{(3)}$ , der Regelschnitt  $K$ , der Doppelpunkt  $A$ . Seien  $BC$  2 Schnittpunkte von  $C^{(3)}$  und  $K$  und  $ABC$  die Hauptpunkte einer Steiner'schen Verwandtschaft, so entspricht der  $C^{(3)}$  ein Regelschnitt  $\mathcal{C}$ , dem  $K$  ein Regelschnitt  $\mathcal{K}$ , welcher  $\mathcal{C}$  in 4 Punkten  $DEFG$  schneidet. Die ihnen entsprechenden Punkte  $DEFG$  sind die einzigen, in denen  $K$  außer in  $BC$  die  $C^{(3)}$  schneiden kann.

68. Jede Curve III. D. mit einem Doppelpunkt wird auf unzählige Arten durch ein Regelschnittbüschel und ein projectivisches Strahlenbüschel erzeugt, deren Basispunkte auf der Curve liegen.

$A$  sei der Doppelpunkt der Curve  $C^{(3)}$ . Man lege durch 4 beliebige Punkte derselben,  $BCDE$  die Regelschnitte  $KK_1, K_2, \dots$  eines Büschels, welche die Curve noch in den Punkten  $FG, F_1 G_1, F_2 G_2, \dots$  schneiden. Wählt man  $ABC$  als Hauptpunkte einer Steiner'schen Verwandtschaft, so entsprechen der  $C^{(3)}$  und den Regelschnitten  $KK_1, K_2, \dots$  ein Regelschnitt  $\mathcal{C}$  und die Regelschnitte  $\mathcal{K}\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \dots$  eines Büschels, dessen Basispunkte  $BC$  und die den Punkten  $DE$  entsprechenden Punkte  $\mathcal{D}\mathcal{E}$  sind, welche auf  $\mathcal{C}$  liegen. Deshalb schneiden  $\mathcal{K}\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \dots$  den Regelschnitt in Punktpaaren einer Involution und zwar sind diese  $\mathcal{H}\mathcal{G}, \mathcal{H}_1 \mathcal{G}_1, \mathcal{H}_2 \mathcal{G}_2, \dots$  die den Punkten  $FG, F_1 G_1, F_2 G_2, \dots$  entsprechenden. Legt man nun durch  $ABC$  und die Punktpaare  $\mathcal{H}\mathcal{G}, \mathcal{H}_1 \mathcal{G}_1, \mathcal{H}_2 \mathcal{G}_2, \dots$  Regelschnitte  $\alpha\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots$ , so bilden diese nach 66. ein Büschel, dessen 4ter Basispunkt  $M$  auf  $\mathcal{C}$  liegt. Ihnen entsprechen die geraden Linien  $FG, F_1 G_1, F_2 G_2, \dots$ , die sich in  $M$ , dem  $M$  entsprechenden Punkt schneiden müssen. — Da jedem Regelschnitt  $K$  eine Gerade  $FG$  und dieser wieder derselbe Regelschnitt entspricht, so sind die Regelschnitte  $KK_1, K_2, \dots$  projectivisch zum Strahlenbüschel  $M(EF, E_2, \dots)$ . —  $M$  heißt der gegenüberliegende Punkt der Punkte  $BCDE$ .

Einen andern Beweis giebt Weyr im 5ten Hest der „Zeitschrift für Mathematik und Physik“ des 5ten Jahrganges.

69. Schneidet ein Regelschnitt eine Curve III. D. mit einem Doppelpunkt in  $BC, DE, FG$  so treffen die Linien  $BC, DE, FG$  die Curve in drei Punkten einer Geraden.

Denn zu den Regelschnitten des Büschels, welches durch  $BCDE$  gelegt werden kann, gehört



auch das Linienpaar  $BC, DE$ , dessen Schnittpunkte mit der Curve in einer Geraden mit dem gegenüberliegenden Punkt von  $BCDE$  liegen müssen.

70. Legt man durch die Schnittpunkte  $HJM$  einer Geraden mit einer Curve III. D. mit einem Doppelpunkt 3 Gerade, welche die Curve in  $BC, DE, FG$  schneiden, so liegen diese 6 Punkte auf einem Kegelschnitt.

Denn  $M$  ist der gegenüberliegende Punkt von  $BCDE$ .

71. Die harmonischen Mittelpunkte des ersten Grades eines Punktes  $O$  in Bezug auf die Schnittpunkte aller Geraden durch  $O$  mit einer Curve III. D. mit einem Doppelpunkt liegen auf einer Geraden, der geraden Polare von  $O$ .

**Fig. VI.** Seien  $ABC$  drei Punkte der  $C^{(3)}$  in gerader Linie. Zieht man  $OA, OB, OC$ , so liegen die Schnittpunkte  $A_1 A_2, B_1 B_2, C_1 C_2$  mit  $C^{(3)}$  auf einem Kegelschnitt  $K$  und die harmonischen Mittelpunkte bezüglich  $O$  liegen nach 42. in einer Geraden. Die Linie  $AB$  schneide  $C^{(3)}$  in  $D$  und  $OD$  die  $C^{(3)}$  in  $D_1 D_2$ , dann liegen die harmonischen Mittelpunkte von  $AA_1 A_2, BB_1 B_2, DD_1 D_2$  bezüglich  $O$  in derselben Geraden zc. . .

72. Zieht man durch einen Punkt  $O$  zwei Transversalen, welche die  $C^{(3)}$  in  $AA_1 A_2, BB_1 B_2$  treffen, so ist die gerade Polare von  $O$  bezüglich des von den Geraden  $AB, A_1 B_1, A_2 B_2$  gebildeten Dreiecks zugleich die gerade Polare von  $O$  bezüglich  $C^{(3)}$ .

Folgt aus 71. (Durège §. 293.)

73. Zieht man durch einen Punkt  $O$  eine Transversale und in ihren Schnittpunkten mit  $C^{(3)}$  Tangenten, so ist die gerade Polare von  $O$  bezüglich des von den Tangenten gebildeten Dreiecks zugleich die gerade Polare von  $O$  bezüglich  $C^{(3)}$ .

Folgt aus 72. wenn man die Transversalen  $OA$  und  $OB$  zusammenfallen läßt.

74. Die gerade Polare eines Punktes der  $C^{(3)}$  ist die Tangente in diesem Punkt.

Denn die gerade Polare eines Punktes einer Seite eines Dreiecks in Bezug auf dieses Dreieck ist die Seite selbst. —

75. Die geraden Polaren aller Punkte einer Geraden  $l$  in Bezug auf eine Curve  $C^{(3)}$  III. D. mit einem Doppelpunkt umhüllen einen Kegelschnitt, die Poloconik von  $l$ . — Construiert man in den Schnittpunkten  $\alpha'\beta'\gamma'$  von  $l$  und  $C^{(3)}$  die Tangenten, welche sich in  $ABC$  schneiden mögen, und die harmonischen Gegenpunkte  $\alpha\beta\gamma$  zu  $\alpha'\beta'\gamma'$  in Bezug auf die Ecken  $ABC$ , so werden die Seiten des Dreiecks  $ABC$  von der Poloconik in  $\alpha\beta\gamma$  berührt.

(Durège. Die ebenen Curven III. D. pag. 183.)

Folgt aus 16. und 73.

76. Die harmonischen Mittelpunkte II. Grades in Bezug auf einen Punkt  $O$  für die Schnittpunkte aller durch  $O$  gelegten Transversalen mit einer Curve  $C^{(3)}$

III. D. mit einem Doppelpunkt liegen auf einem Kegelschnitt, der conischen Polare von  $O$  bezüglich  $C^{(3)}$ .

Irgend eine Gerade  $g$  schneide  $C^{(3)}$  in  $ABC$  und die Linien  $AO, BO, CO$  schneiden  $C^{(3)}$  in den 6 Punkten  $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$  eines Kegelschnitts  $K$ . Die conische Polare  $x$  von  $O$  bezüglich  $(K, g)$  trifft die 3 Transversalen durch  $O$  in den harmonischen Mittelpunkten II. Grades in Bezug auf  $O$ , d. i. in  $A''A'''$ ,  $B''B'''$ ,  $C''C'''$ . Die harmonischen Mittelpunkte I. Grades seien  $A', B', C'$ ; sie liegen in einer Geraden, der Polaren von  $O$  bezüglich  $x$ . — Es schneide  $AB$ , die  $C^{(3)}$  noch in  $D$  und  $OD$  dieselbe in  $D_1, D_2$ , so liegen  $A_1, A_2, B_1, B_2, D_1, D_2$  auf einem Kegelschnitt  $K_1$  und die conische Polare  $x_1$  von  $O$  bezüglich  $(K_1, AB)$  ist ein Kegelschnitt durch die harmonischen Mittelpunkte II. Grades  $A''A''' B''B''' D''D'''$ , in Bezug auf welchen  $O$  und  $A'B'C'$  Pol und Polare sind, deshalb fällt  $x_1$  mit  $x$  zusammen u. f. w.

Einen zweiten Beweis findet man in 44.

77. Die conische Polare eines jeden Punktes  $O$  in Bezug auf eine Curve III D. mit einem Doppelpunkt geht durch diesen und die Berührungspunkte der von  $O$  an die Curve gelegten Tangenten.

Folgt aus 15.

78. Eine Curve III. D. mit einem Doppelpunkt ist von der IV. Klasse.

Die Curve sei  $C^{(3)}$ , der Doppelpunkt  $A$ ,  $O$  ein beliebiger Punkt,  $x$  seine conische Polare und  $BC$  2 ihrer Schnittpunkte mit  $C^{(3)}$ . Man wähle  $ABC$  als Hauptpunkte einer Steiner'schen Verwandtschaft, so entspricht dem  $x$  eine Gerade  $g$ , der  $C^{(3)}$  ein Kegelschnitt  $\mathcal{C}$ . Den Schnittpunkten von  $g$  und  $\mathcal{C}$  entsprechen die Schnittpunkte von  $x$  und  $C^{(3)}$ ; diese haben also außer dem Doppelpunkt noch 4 Schnittpunkte und daher lassen sich von  $O$  4 Tangenten an  $C^{(3)}$  ziehen.

79. Die conischen Polaren aller Punkte einer Geraden bilden ein Kegelschnittbüschel.

Folgt aus 6. oder 14.

80. Jede Gerade hat 3 Pole.

Nämlich die 3 Basispunkte des Kegelschnittbüschels, welches die conischen Polaren der Geraden bilden, außer dem Doppelpunkt.

81. Alle conischen Polaren, welche durch einen Punkt gehen, bilden ein Kegelschnittbüschel. (Cremona.)

Ist  $O$  irgend ein Punkt,  $g$  seine gerade Polare,  $OO_1, O_2$  deren drei Pole, so treffen sich die conischen Polaren aller Punkte von  $g$  außer im Doppelpunkt noch in  $OO_1, O_2$  und bilden also ein Büschel.

82. Irgend 2 Punkte bestimmen eine einzige conische Polare und alle conischen Polaren bilden daher ein Kegelschnittnetz. Also sind sämtliche conische Polaren durch irgend 3 derselben, die nicht zu einem Büschel gehören, bestimmt.



Der Satz folgt aus 81. und den Eigenschaften des Regelschnittkegels (cfr. Schröter, Steiners Vorlesungen II. pag. 530.)

83. Die conische Polare eines Punktes  $O$  von  $C^{(3)}$  berührt die Curve in diesem Punkt und trennt je 2 Punkte derselben, die mit  $O$  in einer Geraden liegen, von  $O$  harmonisch.

Folgt aus 74. und 15. a.

84. Die Poloconik einer Geraden ist der Ort der Pole derselben in Bezug auf die conischen Polaren ihrer Punkte. (Cremona art. 125. Durège art. 315.)

**Fig. VII.** Die gerade  $g$  schneide  $C^{(3)}$  in  $MNP$ , die Tangenten in diesen Punkten treffen sich in  $ABC$ ; sind dann  $ABPP'$ ,  $BCMM'$ ,  $ACNN'$  je 4 harmonische Punkte, so berührt die Poloconik von  $g$  die Tangenten in  $M'N'P'$ . — Die Seite  $AB$ , welche  $C^{(3)}$  in  $P$  berührt, mag sie noch in  $P_1$  schneiden und  $NP_1$  die Curve noch in  $M_1$  treffen, dann läßt sich (cfr. 70.) durch  $NMM_1$  ein Regelschnitt legen, der in  $N$  eine dreipunktige und in  $M$  eine 2punktige Berührung mit  $C^{(3)}$  hat, also in diesen Punkten die Seiten  $AC$  und  $BC$  berührt. Die conische Polare von  $N$  bezüglich  $C^{(3)}$  ist daher identisch mit der conischen Polare bezüglich der Curve III. D., die aus jenem Regelschnitt und der Geraden  $AB$  besteht. Der Pol von  $g$  bezüglich der conischen Polare von  $N$  ist daher  $N'$ ; ebenso sind  $M'P'$  die Pole von  $g$  bezüglich der conischen Polaren von  $M$  und  $P$ . — Die conischen Polaren aller Punkte von  $g$  bilden ein Büschel, zwei Regelschnitte desselben berühren  $g$  in  $RS$ , die Polaren von  $R$  bezüglich aller conischen Polaren des Büschels treffen sich in  $S$ , also geht durch  $S$  und ebenso durch  $R$  nur eine Tangente an die Poloconik, d. h.  $R$  und  $S$  sind 2 Punkte derselben. Da die Pole von  $g$  bezüglich aller conischen Polaren des Büschels auf einem Regelschnitt liegen und dieser mit der Poloconik die 5 Punkte  $M'N'P'RS$  gemeinsam hat, so fallen beide Regelschnitte zusammen.

85. Sind  $\alpha_1 \alpha_2$  die conischen Polaren zweier Punkte  $P_1 P_2$  in Bezug auf eine Curve III. D. mit einem Doppelpunkt, so fällt die Polare von  $P_1$  bezüglich  $\alpha_2$  mit der von  $P_2$  bezüglich  $\alpha_1$  zusammen.

Beweis wie in 23.

- 85 a. Der geometrische Ort der Pole einer von 2 Geraden  $l$  und  $l_1$  in Bezug auf die conischen Polaren der Punkte der andern ist ein Regelschnitt, der die gemischte Poloconik von  $l$  und  $l_1$  heißt.

Die conischen Polaren von  $l$  und  $l_1$ , welche Linien die  $C^{(3)}$  in  $\alpha' \beta' \gamma'$  und  $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1$  schneiden mögen, bilden je ein Büschel; jedes hat 3 Geradenpaare, deren Scheitel  $\alpha \beta \gamma$  und  $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1$  sein mögen. Diese 2 Mal 3 Punkte bilden also 2 Tripel in Bezug auf die conische Polare des Schnittpunkts von  $l$  und  $l_1$  und liegen daher (cfr. Schröter pag. 158.) auf einem Regelschnitt  $R$ . Die conische Polare von  $\alpha$  ist ein Geradenpaar ( $aa'$ ) mit dem Scheitel  $\alpha'$ . Es trenne  $l'$  die Gerade  $l$  von  $aa'$  harmonisch und schneide  $l_1$  in  $A_1$ , dann ist  $l$  die Polare von  $A_1$  bezüglich ( $aa'$ ) und des-

halb auch die Polare von  $\alpha$  in Bezug auf die conische Polare von  $A_1$ , also ist  $\alpha$  der Pol von  $l$  bezüglich der conischen Polare von  $A_1$  auf  $l_1$ . — Der weitere Theil des Beweises ist wie in 32. zu führen. — Es folgt dann, daß auch für Curven III. O. mit einem Doppelpunkt der Satz 33. gilt.

86. Jede Curve III. O. mit einem Doppelpunkt hat zwei Doppelpunktstangenten.

$A$  sei der Doppelpunkt einer Curve  $C^{(3)}$ , dann wähle man  $A$  und 2 andere Punkte  $B$  und  $C$  als Hauptpunkte einer Steiner'schen Verwandschaft. Der  $C^{(3)}$  entspricht dann ein Kegelschnitt  $K$ , dessen Schnittpunkte mit  $BC$  die Punkte  $M$  und  $N$  sein mögen. Die diesen entsprechenden Punkte  $M$  und  $N$  auf  $C^{(3)}$  fallen mit  $A$  zusammen. Da den Linien  $AM$  und  $AN$  die Linien  $AM$  und  $AN$  entsprechen, so sind dieses die beiden Tangenten an  $C^{(3)}$  im Doppelpunkt.

87. Die conische Polare des Doppelpunkts ist das Geradenpaar der Doppelpunktstangenten.

Da die conische Polare eines Punktes der Curve diese berührt, so muß die conische Polare des Doppelpunkts in ihm jede der beiden Doppelpunktstangenten berühren, also mit ihnen zusammenfallen.

88. Die conische Polare  $\alpha$  irgend eines Punktes  $P$  ist ein Kegelschnitt, dessen Tangente im Doppelpunkt harmonisch ist zu dem nach dem Pol gehenden Strahl bezüglich der beiden Doppelpunktstangenten.

Der Doppelpunkt sei  $A$ , seine beiden Tangenten seien  $tt_1$ , dann fällt die Polare von  $A$  bezüglich  $\alpha$ , d. i. die Tangente in  $A$  an  $\alpha$ , mit der Polare von  $P$  bezüglich  $tt_1$  zusammen nach 85. Letztere trennt aber  $tt_1$  von  $AP$  harmonisch.

89. Ist die conische Polare eines Punktes  $O$  ein Geradenpaar mit dem Scheitel  $O^1$ , so ist die conische Polare von  $O^1$  ein Geradenpaar mit dem Scheitel  $O$ . (Cremona art. 78.)

Die gerade und conische Polare von  $O$  gehen durch  $O^1$ , also muß  $O$  auf der conischen und geraden Polare von  $O^1$  liegen (cfr. 6.); die erstere muß also ein Geradenpaar mit dem Scheitel  $O$  sein.

90. Je 2 Punkte  $O$  und  $O^1$  von der Beschaffenheit, daß die conische Polare des einen ein Geradenpaar ist, dessen Scheitel im andern liegt, sind conjugirte Punkte in Bezug auf alle conischen Polaren.

Die conische Polare von  $O$  ist ein Geradenpaar  $oo_1$  mit dem Scheitel  $O^1$ . Zieht man durch  $O$  beliebige Gerade, so bilden die conischen Polaren ihrer Punkte Kegelschnittbüschel; das Geradenpaar  $oo_1$  gehört allen Büscheln an, also sind  $O$  und  $O^1$  conjugirte Punkte in Bezug auf alle Büschel, denn umgekehrt ist auch die conische Polare von  $O^1$ , nämlich das Geradenpaar  $o^1o_1$ , allen Kegelschnittbüscheln gemeinschaftlich, welche die conischen Polaren der Punkte aller Geraden durch  $O^1$  bilden.

91. Die conischen Polaren aller Punkte einer Geraden, welche durch den Doppelpunkt einer Curve III. O. geht, bilden ein Büschel, dessen einzelne Kegelschnitte sich im Doppelpunkt berühren.

Denn das eine Geradenpaar des Büschels hat seinen Scheitel im Doppelpunkt.



92. Je 2 Punkte, die in Bezug auf alle conischen Polaren einer Curve  $C^{(3)}$  III. D. mit einem Doppelpunkt, conjugirte Punkte sind, liegen wieder auf einer Curve III. D., die mit der ersten einen gemeinschaftlichen Doppelpunkt hat. Die zweite Curve heißt die Hesse'sche Curve der ersten oder, wie Steiner sie genannt hat, die Tripelcurve des Netzes der conischen Polaren. (cfr. Schröter, Steiner's Vorlesungen II. pag. 530.)

Ist  $g$  eine beliebige Gerade, so bilden die conischen Polaren aller Punkte von  $g$  ein Regelschnittbüschel. Da es unter den Regelschnitten des Büschels 3 Geradenpaare giebt, so giebt es auf  $g$  3 den Scheiteln derselben in Bezug auf sämtliche Regelschnitte des Netzes conischer Polaren conjugirte Punkte. Diese erfüllen also eine Curve der dritten Ordnung. — Auf einer beliebigen Geraden durch den Doppelpunkt  $A$  giebt es außer diesem (nach 91.) nur einen Punkt, zu welchem ein in Bezug auf alle conischen Polaren conjugirter Punkt existirt. Die Hesse'sche Curve hat also in  $A$  einen Doppelpunkt.

93. Zwei Curven  $C^{(3)}$  und  $C_1^{(3)}$  III. D. mit einem Doppelpunkt schneiden sich in 9 Punkten.

Seien  $ABCD$  4 gemeinschaftliche Punkte,  $M$  und  $M_1$  ihre gegenüberliegenden in beiden Curven, so kann man sich jede der Curven (cfr. 68.) entstanden denken durch das Regelschnittbüschel, dessen Basispunkte  $ABCD$  sind und durch 2 zu ihnen projectivische Strahlenbüschel mit den Scheiteln  $M$  und  $M_1$ . Da diese selbst projectivisch sind, so erzeugen sie einen Regelschnitt, der jede Curve außer in  $M$  und  $M_1$  nur noch (cfr. 67.) in 5 Punkten schneiden kann, die beiden Curven gemeinschaftlich sein müssen.

- 93a. Zwei Curven III. D.  $C^{(3)}$  und  $C_1^{(3)}$ , die einen gemeinschaftlichen Doppelpunkt  $A$  haben, schneiden sich nur noch in 5 Punkten, so daß also der Doppelpunkt für 4 Schnittpunkte zählt.

Sind  $BC$  zwei andere Schnittpunkte der beiden Curven,  $ABC$  die Hauptpunkte einer Steiner'schen Verwandtschaft, so entsprechen den beiden Curven 2 Regelschnitte  $R$  und  $R_1$ , die sich außer in  $A$  nur noch in 3 Punkten  $DEF$  schneiden können, deren entsprechende  $DEF$  die noch möglichen Schnittpunkte von  $C^{(3)}$  und  $C_1^{(3)}$  sind.

94. Die Schnittpunkte, in denen eine Curve  $C^{(3)}$  III. D. mit einem Doppelpunkt von ihrer Hesse'schen Curve getroffen wird, sind die Wendepunkte der  $C^{(3)}$ .

Ist  $W$  ein Punkt, der beiden Curven gemeinschaftlich ist, so muß seine conische Polare die  $C^{(3)}$  berühren, weil er auf ihr liegt und, weil er auf der Hesse'schen Curve liegt, in ein Geradenpaar  $ww_1$  zerfallen, dessen einer Theil  $w$  also die  $C^{(3)}$  berühren muß, während der andere  $w_1$  je zwei Punkte von  $C^{(3)}$ , die mit  $W$  in gerader Linie liegen, von  $W$  harmonisch trennt. Die Gerade  $w$  kann aber

mit  $C^{(3)}$  keinen andern Punkt gemein haben. Wäre  $P$  ein solcher, so müßte seine gerade, sowie seine conische Polare durch  $W$  gehen, denn  $w$  ist zugleich die gerade Polare von  $W$ . Da aber die gerade Polare von  $P$  die  $C^{(3)}$  in  $P$  berührt, so müßte  $w$  die  $C^{(3)}$  in 2 Punkten berühren, was unmöglich ist, also hat  $w$  in  $W$  mit  $C^{(3)}$  drei Punkte gemeinschaftlich und ist daher eine Wendetangente und  $W$  ein Wendepunkt.

95. Je zwei Schnittpunkte von  $C^{(3)}$ , die mit einem Wendepunkt in gerader Linie liegen, werden von diesem durch eine Gerade harmonisch getrennt, welche die harmonische Polare des Wendepunkts heißt.

Folgt aus dem Beweis von 94.

96. Jede Gerade, welche zwei Wendepunkte einer Curve  $C^{(3)}$  III. O. mit einem Doppelpunkt verbindet, geht auch durch einen dritten.

Die beiden Wendepunkte seien  $W_1$  und  $W_2$ ; der Schnittpunkt von  $W_1 W_2$  mit  $C^{(3)}$  sei  $W_3$ . In  $W_1$  und  $W_2$  sind je 3 Punkte  $AA_1 A_2$ ,  $BB_1 B_2$  in gerader Linie vereinigt; die Verbindungslinien  $AB$ ,  $A_1 B_1$ ,  $A_2 B_2$  müssen  $C^{(3)}$  (nach 70.) in drei neuen Punkten einer Geraden treffen: also sind in  $W_3$  auch drei Punkte in einer Geraden vereinigt, d. h.  $W_3$  ist ein Wendepunkt.

97. Jede Curve  $C^{(3)}$  III. O. mit einem Doppelpunkt hat 3 Wendepunkte, die in gerader Linie liegen.

Der Doppelpunkt sei  $A$  und  $BC$  irgend 2 andere Punkte der Curve, so entspricht ihr, wenn wir  $ABC$  als Hauptpunkte einer Steiner'schen Verwandtschaft wählen, ein Kegelschnitt  $K$ , welcher durch  $A$  geht. Sind  $PP'P'' \dots$  beliebige Punkte von  $K$ , so bestimmt jeder mit  $ABC$  ein Kegelschnittbüschel; die einzelnen Kegelschnitte eines jeden Büschels schneiden  $K$  in den Punktpaaren einer Involution. Da zu den Büscheln auch die Geradenpaare  $BC, AP$ ;  $BC, AP'$ ;  $BC, AP''$ ,  $\dots$  gehören, so bilden die Schnittpunkte  $MN$  von  $BC$  mit  $K$  ein allen Involutionen gemeinschaftliches Punktpaar. Unter den Kegelschnitten eines jeden Büschels giebt es 2, welche  $K$  berühren und sämtliche Berührungspunkte bilden eine Involution mit den Doppelpunkten  $MN$ . Die Verbindungslinien je zweier schneiden sich in einem Punkt  $S$ , in dem sich auch die Tangenten in  $M$  und  $N$  an  $K$  treffen. — Die Berührungspunkte, die zu den Büscheln  $ABCP$ ,  $ABCP'$ ,  $ABCP''$ ,  $\dots$  gehören, mögen  $P_1 P_2$ ,  $P'_1 P'_2$ ,  $P''_1 P''_2$ ,  $\dots$  sein, dann sind die Strahlenbüschel  $A (PP'P'' \dots)$  und  $S (P_1 P_2, P'_1 P'_2, P''_1 P''_2, \dots)$  projectivisch und erzeugen einen Kegelschnitt  $C$ , welcher  $K$  außer in  $A$  noch in  $WW_1 W_2$  schneidet. Jeder dieser Punkte z. B.  $W$  hat die Eigenschaft, daß von den beiden Kegelschnitten, welche durch  $ABCW$  gehen und  $K$  berühren, einer mit dem zusammenfällt, welcher  $K$  in  $W$  berührt, also mit  $K$  drei Punkte gemeinschaftlich hat oder  $K$  in  $W$  osculirt. Diesem Kegelschnitt entspricht aber, weil er durch  $ABC$  geht, in der Steiner'schen Verwandtschaft, eine Gerade, welche  $C^{(3)}$  in drei zusammenfallenden Punkten schneidet, oder eine Wendetangente ist. Jedem der drei osculirenden Kegelschnitte entspricht also eine Wendetangente und den 3 Osculationspunkten  $WW_1 W_2$  die drei Wendepunkte  $WW_1 W_2$  von  $C^{(3)}$ . —



Da die 3 Osculationspunkte als Schnittpunkte von  $\mathcal{K}$  und einem andern Kegelschnitt, der durch  $A$  geht, erhalten werden, so folgt, daß entweder einer oder alle drei reell sind und dies gilt dann auch von den Wendepunkten.

Ein Kegelschnittbüschel durch  $ABCW$  schneidet  $\mathcal{K}$  in Punktpaaren einer Involution. Zu den Kegelschnitten dieses Büschels gehört auch der in  $W$  osculirende. Die Verbindungslinien aller Punktpaare und die Tangente in  $W$  schneiden sich in einem Punkt  $U$  von  $BC$ , weil das Linienpaar  $AW, BC$  auch zu den Kegelschnitten des Büschels gehört. Ebenso giebt es auf  $BC$  noch 2 andere Punkte  $U_1$  und  $U_2$ , die von den Kegelschnittbüscheln  $ABCW_1$  und  $ABCW_2$  abhängen. Die in  $W$  und  $W_1$  osculirenden Kegelschnitte seien bezeichnet mit  $(ABCWWW)$  und  $(ABCW_1W_1W_1)$ . Man verbinde  $U$  mit  $W_1$  und  $U_1$  mit  $W$  und nenne  $ZZ_1$  die Schnittpunkte dieser Linien mit  $\mathcal{K}$ ; dann müssen die 6 Punkte  $ABCWW, Z$  und  $ABCW_1W_1Z_1$  je auf einem Kegelschnitt liegen und da beide Kegelschnitte 5 Punkte  $ABCWW_1$  gemeinschaftlich haben, so müssen sie zusammenfallen und ebenso  $ZZ_1$  in den 4ten Schnittpunkt dieses Kegelschnitts mit  $\mathcal{K}$ , folglich geht die Tangente in diesem Punkt  $Z$  an  $\mathcal{K}$  durch den Schnittpunkt von  $WW_1$  mit  $UW_1$  oder  $BC$ . Die Punkte  $ABCZ$  bestimmen ein Kegelschnittbüschel, dessen Kegelschnitte  $\mathcal{K}$  in den Punktpaaren einer Involution schneiden. Eines dieser Punktpaare ist  $WW_1$  und die Verbindungslinien der übrigen müssen sich in einem Punkt von  $BC$  schneiden. Da die Tangente in  $Z$  auch durch jenen Schnittpunkt geht, so fällt auch in  $Z$  ein solches Punktpaar, daher muß es einen Kegelschnitt durch  $ABC$  geben, der  $\mathcal{K}$  in  $Z$  osculirt. Da es aber, durch  $ABC$  nur drei solche Kegelschnitte giebt und  $Z$  mit  $W$  und  $W_1$  nicht zusammenfallen kann, so muß es mit  $W_2$  zusammenfallen. Daraus folgt, daß die 6 Punkte  $ABCWW_1W_2$  auf einem Kegelschnitt liegen, diesem entspricht in der Steiner'schen Verwandtschaft eine Gerade, auf der daher die 3 Wendepunkte von  $C^{(3)}$  liegen müssen.

### 98. Eine Curve III. D. mit einer Spitze hat nur einen Wendepunkt.

Sei  $\mathcal{K}$  ein beliebiger Kegelschnitt,  $A$  auf ihm ein Punkt,  $BC$  eine Tangente mit dem Berührungspunkt  $M$ , so entspricht, wenn man  $ABC$  als Hauptpunkte einer Steiner'schen Verwandtschaft wählt, diesem Kegelschnitt eine Curve III. D., die in  $A$  einen Doppelpunkt hat. Dem Berührungspunkt  $M$  entspricht  $A$ , der Linie  $AM$  also die Tangente in  $A$ . Es fallen also in diesem Falle die beiden Doppelpunktstangenten zusammen, der Doppelpunkt wird also zum Rückkehrpunkt oder zur Spitze. — Legt man durch  $BCA$  und die einzelnen Punkte von  $\mathcal{K}$  Kegelschnittbüschel, so giebt es in jedem Büschel 2, welche  $\mathcal{K}$  berühren. Der eine aber ist jedesmal ein Geradenpaar, dessen einer Theil  $BC$  ist, also treffen sich die Verbindungslinien aller Berührungspunkte in  $M$ . Sind  $PP'P'' \dots$  die einzelnen Punkte auf  $\mathcal{K}$ ,  $P_1P'_1P''_1 \dots$  die Berührungspunkte der zu den Büscheln  $(ABCP)$ ,  $(ABCP')$ ,  $(ABCP'') \dots$  gehörenden Kegelschnitte, so sind die Strahlenbüschel  $A (PP'P'' \dots)$  und  $M (P_1P'_1P''_1 \dots)$  projectivisch und erzeugen einen Kegelschnitt  $\mathcal{C}$ . Wählt man in der Reihe der Punkte  $P$  auch  $M$ , so entspricht dem Strahl  $AM$  der Strahl  $MM$  oder  $MB$ , also berührt der Kegelschnitt  $\mathcal{C}$  den Kegelschnitt  $\mathcal{K}$  in  $M$ , geht durch  $A$  und schneidet daher  $\mathcal{K}$  nur noch in einem

Punkt  $W$ . Dieser Punkt ist der einzige, in welchem  $K$  von einem durch  $ABC$  gehenden Kegelschnitt osculirt wird. Der ihm in der Steiner'schen Verwandtschaft entsprechende ist der einzige Wendepunkt der Curve. —

99. Eine Curve III. D. mit einer Spitze ist von der III. Klasse.

Ist  $P$  ein beliebiger Punkt der Ebene,  $P$  sein entsprechender in der Steiner'schen Verwandtschaft mit den Hauptpunkten  $ABC$ , so entsprechen allen Geraden durch  $P$  Kegelschnitte durch  $ABC$ . Unter diesen giebt es 4, welche den Kegelschnitt  $K$ , den der Curve III. D. entsprechenden, berühren. Einer von diesen ( $BC$ ,  $AP$ ) ist ein Linienpaar. Diesem entspricht die Gerade  $AP$ ; den drei übrigen die von  $P$  an die Curve möglichen Tangenten.

100. Die Hesse'sche Curve einer Curve  $C^{(3)}$  III. D. mit einem Doppelpunkt  $A$  hat mit dieser dieselben Doppelpunktstangenten. (Cremona art. 96. d.)

Alle conischen Polaren schneiden sich in  $A$ . Die Hesse'sche Curve von  $C^{(3)}$  ist nach 92. der Ort derjenigen Punkte, deren Polaren in Bezug auf alle conischen Polaren sich in einem Punkt schneiden. Wählen wir 3 dieser conischen Polaren, das Geradenpaar  $aa_1$  der Doppelpunktstangenten, eine, welche  $a$  in  $A$  berührt, sie heiße  $\beta$  und irgend eine beliebige 3te  $\gamma$ . — Die Polaren aller Punkte von  $a$  bezüglich  $\beta$  und  $\gamma$  bilden zwei projectivische Strahlbüschel, deren Scheitel  $A$  und der Pol  $C$  von  $a$  bezüglich  $\gamma$  sind. Sie erzeugen einen Kegelschnitt  $K$ , welcher  $a$  in  $A$  berührt, denn die Polaren von  $A$  bezüglich  $\beta$  und  $\gamma$  sind entsprechende Strahlen der projectivischen Büschel und der eine ist  $a$ , während der andere die Tangente  $CA$  in  $A$  an  $\gamma$  ist, weil  $\gamma$  ja auch durch  $A$  geht. Der dem gemeinschaftlichen Strahl  $CA$  von  $C$  entsprechende Strahl von  $A$  ist aber Tangente an  $K$ . Die Polaren aller Punkte von  $a$  bezüglich ( $aa_1$ ) fallen mit  $a$  zusammen. In den Durchschnitten von  $a$  und  $K$  liegen aber die Punkte, in denen sich die Polaren von Punkten der Linie  $a$  in Bezug auf die 3 Kegelschnitte ( $aa_1$ ),  $\beta$ ,  $\gamma$  treffen. Da nun  $a$  und  $K$  sich in  $A$  berühren, so fällt auf  $a$  mit  $A$  derjenige Punkt zusammen, in dem sich die Polaren von  $A$  bezüglich ( $aa_1$ ),  $\beta$  und  $\gamma$  schneiden und es liegt auf  $a$  kein weiterer Punkt der Hesse'schen Curve. Diese hat also  $a$  und ebenso  $a_1$  zu Tangenten, also mit der Fundamentalcurve  $C^{(3)}$  dieselben Doppelpunktstangenten.

101. Eine Curve  $C^{(3)}$  III. D. mit einem Doppelpunkt  $A$  wird von ihrer Hesse'schen Curve außer im Doppelpunkt noch in 3 Punkten einer Geraden geschnitten. (cfr. 97.)

Im Doppelpunkt schneiden sich zwei Zweige der ersten mit zwei Zweigen der zweiten Curve, also in 4 Punkten. (cfr. 93. a.) Da die beiden Curven nun noch 2 gemeinschaftliche Tangenten haben, so fällt in den Berührungspunkt auf jeder noch ein Schnittpunkt, also haben die Curven im Doppelpunkt 6 Schnittpunkte, können sich folglich nur noch in 3 Punkten schneiden, welche, da sie die Wendepunkte von  $C^{(3)}$  sind, nach 96. in einer Geraden liegen müssen.



Anderer Beweis. Seien  $B$  und  $C$  zwei Schnittpunkte von  $C^{(3)}$  und der Hesse'schen Curve,  $ABC$  die Hauptpunkte einer Steiner'schen Verwandtschaft, so entspricht jeder Curve ein Kegelschnitt,  $K$  und  $K'$ , welche  $BC$  in denselben beiden Punkten  $M$  und  $N$  schneiden müssen, denn die Linien  $AM$  und  $AN$  entsprechen den gemeinschaftlichen Doppelpunktstangenten. Da  $K$  und  $K'$  sich außer in  $M$  und  $N$  nur noch in einem Punkt  $D$  schneiden, so können sich auch  $C^{(3)}$  und ihre Hesse'sche Curve außer in  $B$  und  $C$  nur noch in einem Punkt  $D$ , welcher dem Punkt  $D$  entspricht, schneiden; sie haben also nur 3 Schnittpunkte und diese müssen wegen 96. in einer Geraden liegen.

102. Ist  $A$  für eine Curve III. D. eine Spitze, so wird die Spizentangente von jeder conischen Polare in  $A$  berührt. (Cremona art. 74.)

Ist  $P$  ein beliebiger Punkt, so berührt seine conische Polare  $\pi$  diejenige Linie  $l$  in  $A$ , welche  $PA$  von den Doppelpunktstangenten harmonisch trennt. (cfr. 88.) Da letztere, wenn  $A$  eine Spitze ist, zusammenfallen, so fällt auch  $l$  mit ihnen zusammen.

103. Jede conische Polare schneidet eine Curve III. D. mit einer Spitze  $A$  außer in dieser nur noch in 3 Punkten, die Curve ist also von der III. Klasse. (cfr. 99.)

Denn jede conische Polare hat in  $A$  mit der Curve 3 Punkte gemein, nämlich den Doppelpunkt und den Berührungspunkt der Rückkehrtangente.

104. Die Hesse'sche Curve einer Curve III. D. mit einer Spitze  $A$  hat mit ihr die Rückkehrtangente gemein, und besteht aus 3 Geraden, die sich in der Spitze schneiden und von denen zwei mit der Rückkehrtangente zusammenfallen.

Die conische Polare  $t$  von  $A$  ist die Rückkehrtangente selbst (cfr. 87.), jeder Punkt  $P$  derselben kann also als ein Doppelpunkt von  $t$  angesehen werden, dessen conische Polare  $\pi$  daher (cfr. 89.) einen Doppelpunkt in  $A$  hat. Folglich muß  $t$  ein Theil der Hesse'schen Curve sein. — Ist  $l$  eine beliebige Gerade durch  $A$ , so bilden die conischen Polaren ihrer Punkte ein Kegelschnittbüschel, dessen einzelne Kegelschnitte sich in  $A$  berühren. Sind  $B$  und  $C$  die andern Schnittpunkte, so sind  $(AB, AC)$  und  $(BC, t)$  die beiden Geradenpaare des Büschels, deren Pole der Schnittpunkt von  $BC$  und  $t$ , und  $A$  sind. Auf einer beliebigen durch  $A$  gelegten Geraden giebt es also keinen Punkt der Hesse'schen Curve;  $A$  ist ein dreifacher Punkt derselben. — Ist  $l$  eine beliebige Gerade, die nicht durch die Spitze geht, so bilden die conischen Polaren aller ihrer Punkte wieder ein Büschel  $(AABC)$ , dessen einzelne Kegelschnitte sich in  $A$  berühren. Die beiden Geradenpaare sind wieder  $(AB, AC)$  und  $(t, BC)$ , deren Pole der Schnittpunkt von  $l$  mit  $t$  und ein anderer Punkt von  $l$  sind. — Da es also auf einer beliebigen Geraden  $l$  außer ihrem Schnittpunkt mit der Rückkehrtangente nur noch einen Punkt der Hesse'schen Curve giebt, so zerfällt diese in die doppelt zu zählende Rückkehrtangente und eine Gerade durch die Spitze.

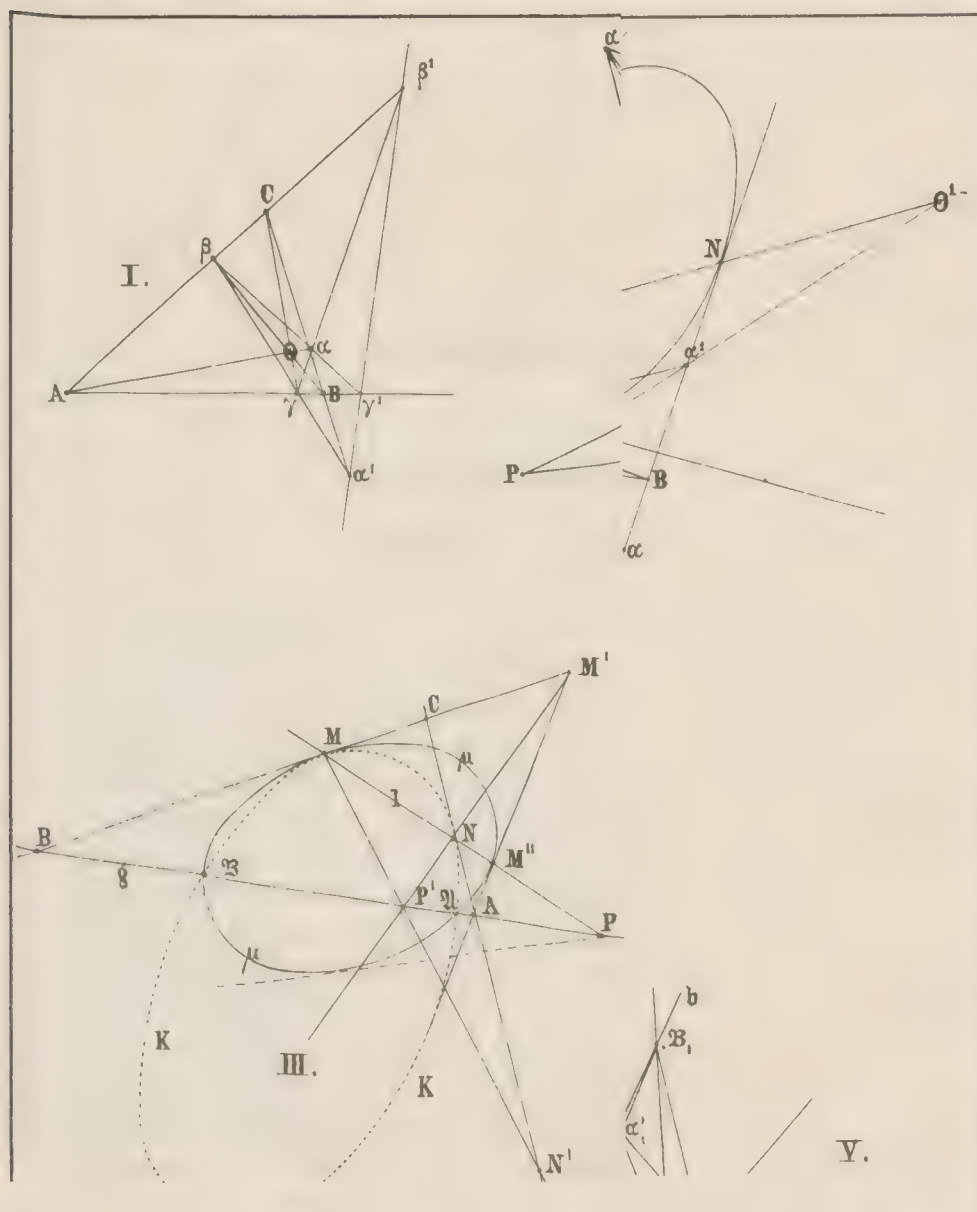
105. Jede Curve III. D. mit einer Spitze hat nur einen Wendepunkt. (98.)

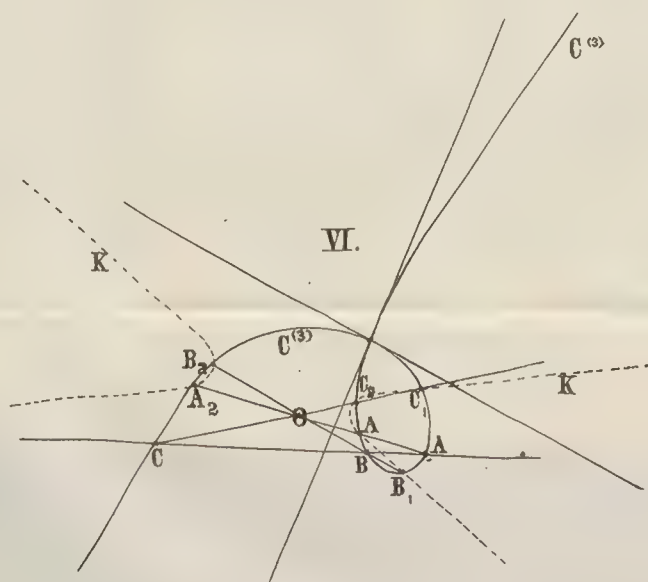
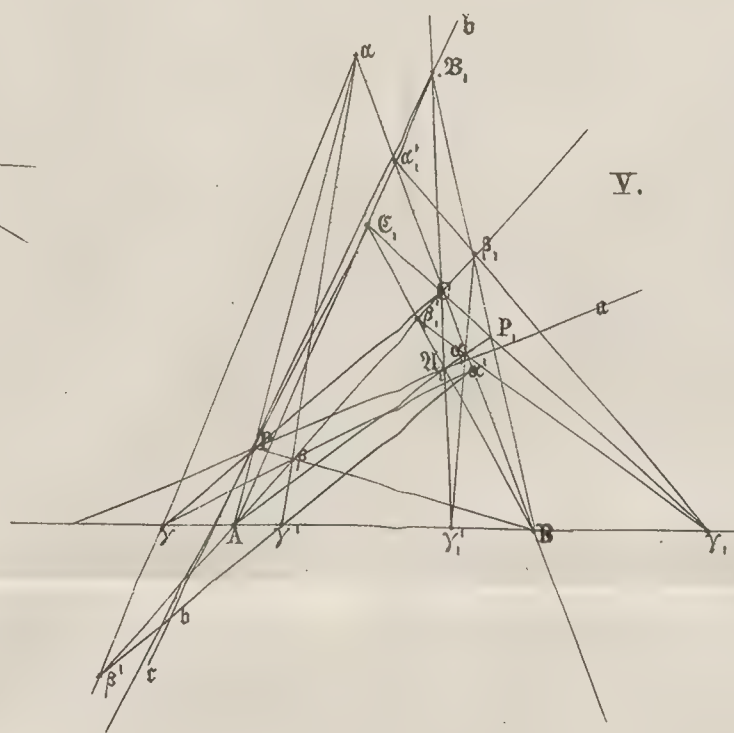
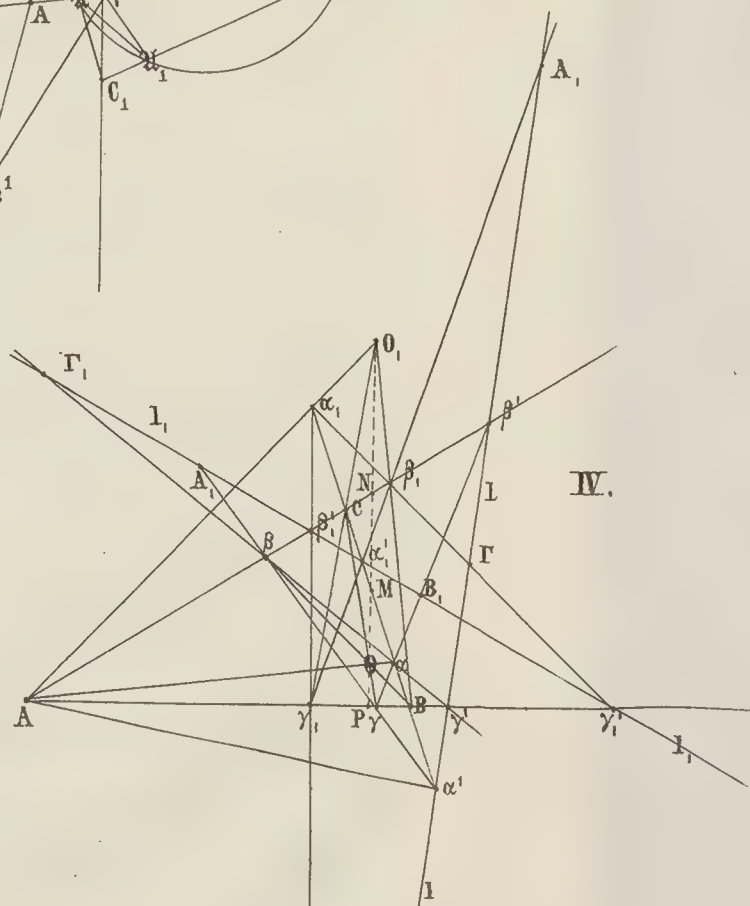
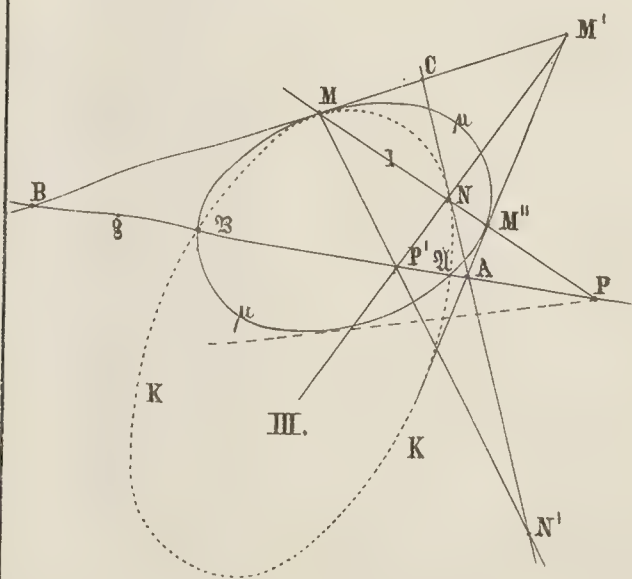
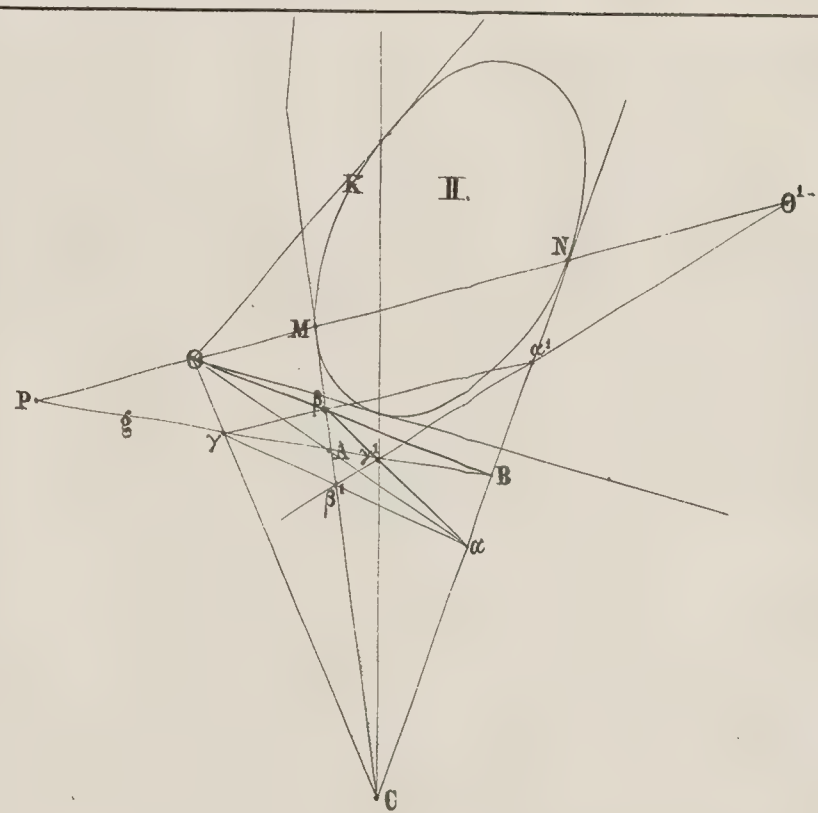
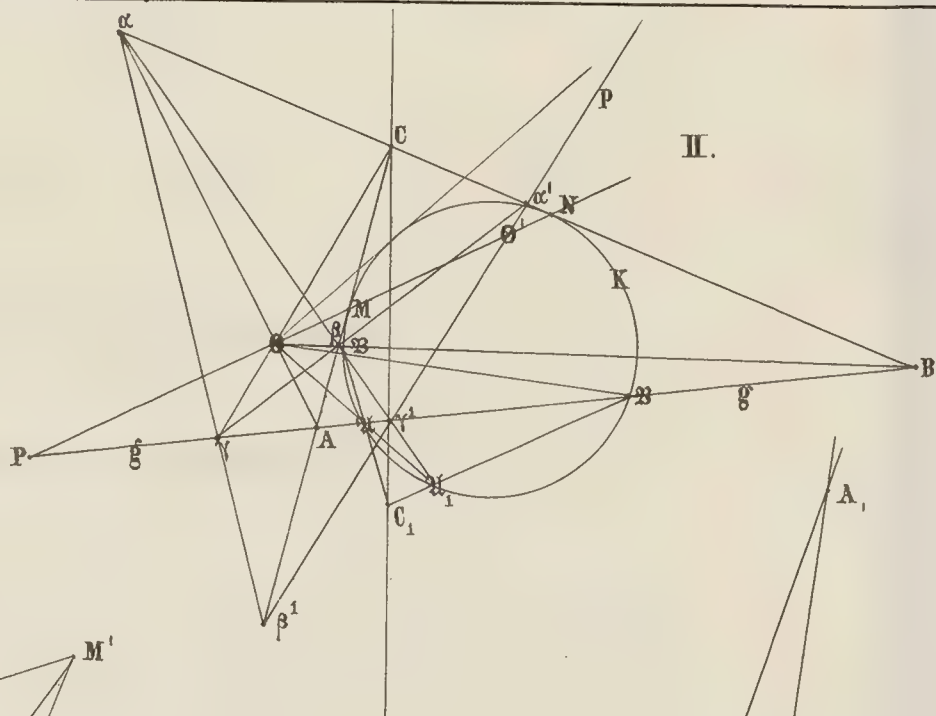
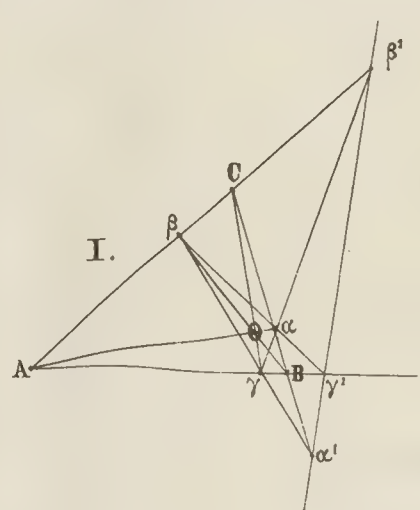
Dieser in 98. bewiesene Satz folgt hier als Zusatz, denn die Curve kann nach 104. von ihrer Hesse'schen Curve nur in einem Punkt geschnitten werden.

Zum Schluß mag noch bemerkt werden, daß die Haupteigenschaften der Curven III. Ordnung mit einem Doppelpunkt und besonders auf ihre Erzeugung durch Strahlenbüschel in einzuweidriger Beziehung (cfr. Wehr. Theorie der mehrdeutigen geometrischen Elementargebilde) sich vermittelt einer Steiner'schen Verwandtschaft aus den Eigenschaften der Kegelschnitte herleiten lassen. — Ferner gelten alle Sätze, welche von den Polaren eines Dreiecks mitgetheilt und für die Curven III. O. mit zwei Doppelpunkten und einem Doppelpunkt nicht besonders erwähnt sind, auch für diese, soweit sie sich auf die Eigenschaften der harmonischen Mittelpunkte stützen. Weitere Folgerungen müssen hier übergangen werden. Man findet sie im Zusammenhang in den öfter erwähnten Werken von Cremona und Durège.

**Milinowski.**



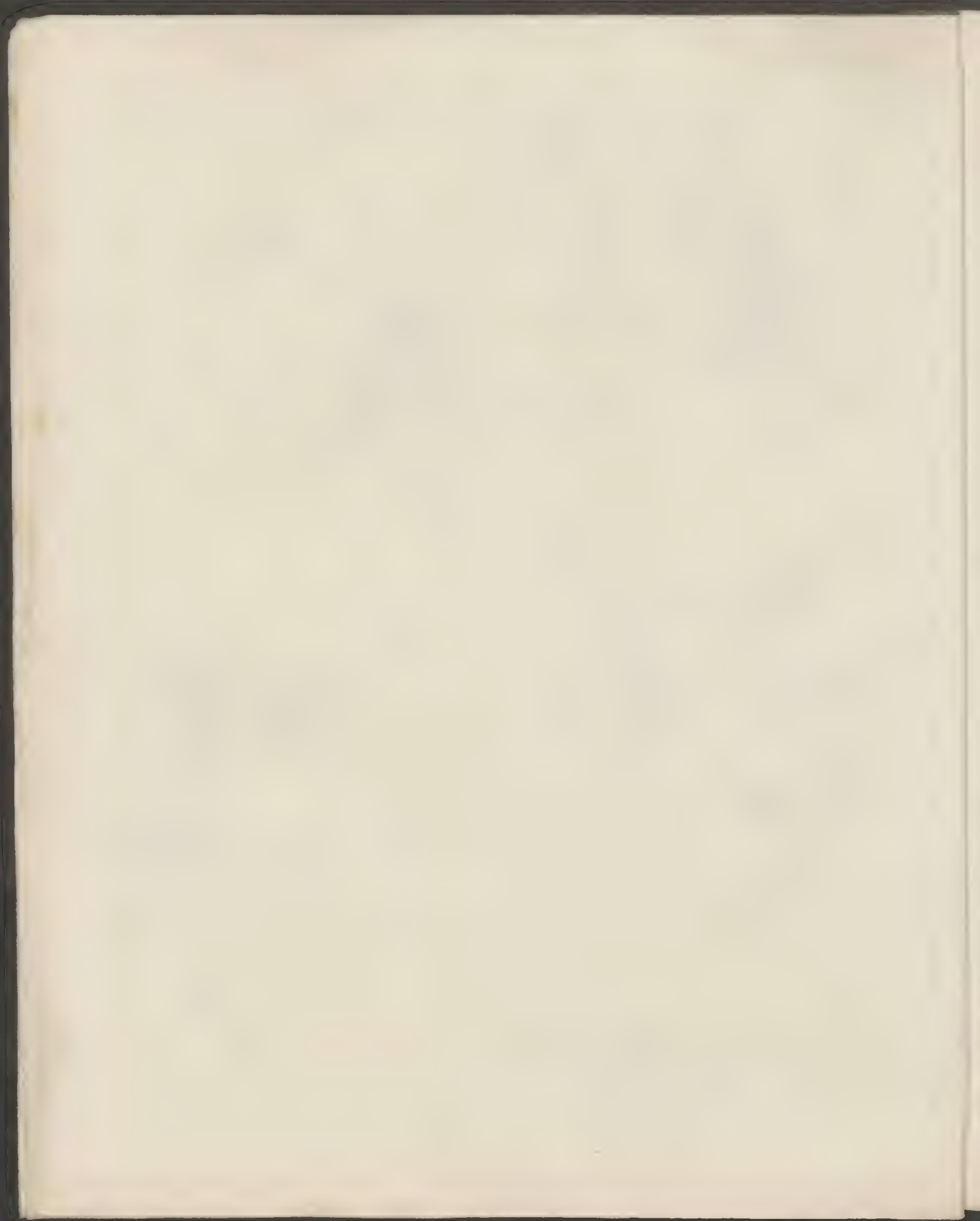




B









## Schulnachrichten.

### A. Allgemeine Lehrverfassung.

#### Ober-Prima. Ordinarius: Der Director.

1) Deutsch, 3 St. Skrodzki. Alte Literatur von Alfilar bis Opiz. Veltüre des Nibelungenliedes. Elemente der Logik. Dispositionirungen und freie Vorträge. Alle 6 Wochen ein Aufsatz. — 2) Latein, 6 St. Böhlmann. Cic. de oratore I. 1—40. Tacit. Annal. I. — Privat.: Cic. pro Milone, pro Ligario. pro rege Dejot., Paradoxa, de oratore I, 40 sqq. Alle 6 Wochen ein Aufsatz, wöchentlich ein Exercitium und Extemporale. — 2 St. der Director. Hor. Od. Lib. I, rep.: Lib. II, III, IV. — 3) Griechisch, 6 St. Kossinna. Demosth. Philipp. I, II, de pace. Ilias III, IV, VI, XVII. Privat.: Ilias XX bis XXIV. Soph. Electra. Repetition der Grammatik nach Buttmann. Alle 14 Tage ein Exercitium. — 4) Französisch, 2 St. Fischer. Veltüre: Phèdre p. Racine. Grammatische Repetitionen. Alle 14 Tage ein Exercitium oder ein Extemporale. — 5) Hebräisch, 2 St. Schickopp. Wiederholung der Elementar- und Formenlehre. Das unregelmäßige Verbum. Veltüre: Exodus mit Auswahl und Psalm 1—30. Monatlich schriftliche Erklärung einer Stelle des A. T. — 6) Religion, 2 St. Schickopp. Reformationsgeschichte von Spener bis Schleiermacher. Wiederholung der Einleitung in die h. Schrift, der alten und mittleren Kirchengeschichte. Veltüre des 2. Corintherbrieves u. der epistolischen Perikopen. Wiederholung der Kirchenlieder und der 5 Hauptstücke. — 7) Mathematik, 4 St. Milinowski. Wiederholungen aus der Stereometrie und Trigonometrie. Reihen, Zinseszinsrechnung. Vom Maximum und Minimum. Uebungen im Auflösen von Aufgaben. Alle 14 Tage eine schriftliche Arbeit. — 8) Physik, 2 St. Milinowski. Die Lehre vom Schwerpunkt der Körper und von den einfachen Maschinen. Wiederholung und Fortsetzung der mathematischen Geogr..phie. — 9) Geschichte und Geographie, 3 St. Fischer. Mittlere Geschichte. Repetitionen der alten, neuen und vaterländischen Geschichte. Geographische Repetitionen nach Bedürfnis. — 10) Gesang, 2 St. Collin. Die 4stimmige Singklasse für gemischten Chor war aus den gesangsfähigen Schülern aller Klassen gebildet. Geübt wurden die Choräle der Schulgesänge, Chöre von Mühling, Hauptmann und Rint; mit dem Männerchor die liturgischen Gesänge, Lieder von Becker und Damroth. Größere Gesänge

für gemischten Chor mit Begleitung: aus Mozart's *Requiem*: „*Dies irae*“, „*Rex tremendae*“, „*Confutatis*“, „*Lacrimosa*“, „*Sanctus*“; Introduktionschor aus dem unterbrochenen Opferfest von Winter. — 11) Zeichnen, I—III. comb., 2 St. Rehberg. Freies Handzeichnen nach größeren, ausgeführten Vorbildern, Köpfe, Thiere, Arabesken, Landschaften u. Perspektivisches Zeichnen.

### Unter-Prima. Ordinarius: Oberlehrer Böhlmann.

1) Deutsch, U. I. a. u. b., 3 St. Strodzki. Neuere Literatur von Opitz bis zum Abschluß der Romantik. Lektüre der Hauptabschnitte aus Lessing's *Laokoön*. Theorie der schriftlichen Darstellung. Freie Vorträge. Alle 6 Wochen ein Aufsatz. — 2) Latein, U. I. a., 8 St. der Director. Cic. de offic. I. Privatin: Cic. in Verrem IV, 32—67, de amicitia, Hor. Sat. I. mit Auswahl. Retrov. Cic. de offic. I, 1—5. Repetition der Grammatik. Wöchentlich ein Exercitium und Extemporale. Alle 6 Wochen ein Aufsatz. — U. I. b., 8 St. Böhlmann. Cic. de offic., orat. pro Milone, Hor. carm. I. Privat.: Cic. in Verrem IV, de offic. Repetition der Grammatik. Wöchentlich ein Exercitium und Extemporale. Alle 6 Wochen ein Aufsatz. — 3) Griechisch, U. I. a., 6 St. Böhlmann. Plato Menexenus. Ilias 1—VII, zum Theil privatim. Soph. Ajax. Grammatische Repetitionen nach Buttmann. Alle 14 Tage ein Exercitium. — U. I. b., 6 St. Meckbach. Plato Euthyphron. Demosth. Philipp. I., II. Soph. Ajax. Hom. Il. I—IV, zum Theil als Privatlektüre. Grammatik: Buttmann § 134—135. Alle 14 Tage ein Exercitium. — 4) Französisch, U. I. a. u. b., 2 St. Fischer. Lektüre: *Phèdre* p. Racine. Grammatische Wiederholungen nach Bedürfnis. Alle 14 Tage ein Exercitium oder Extemporale. — 5) Hebräisch, U. I. a. u. b., komb. mit Ober-Prima. — 6) Religion, U. I. a. u. b., 2 St. Schiefopp. Einleitung in die symbolischen Schriften der evangelischen Kirche. *Confessio Augustana*. Reformationsgeschichte bis zum Tode Luthers. Epheser- und Philipperbrief und epistolische Perikopen. Wiederholung der Kirchenlieder und der 5 Hauptstücke. — 7) Mathematik, U. I. a., 4 St. Milinowski. Wiederholung der Trigonometrie. Stereometrie. Alle 14 Tage eine schriftliche Arbeit. U. I. b., 4 St. Reuter. Stereometrie nach Kambly. Trigonometrische Repetitionen. Alle 14 Tage eine schriftliche Arbeit. — 8) Physik, U. I. a. u. b., 2 St. Milinowski. Von den mechanischen Eigenschaften der Körper. — 9) Geschichte und Geographie, U. I. a. u. b., 3 St. Fischer. Mittlere Geschichte. Wiederholung der alten, neueren und vaterl. Geschichte. Geographische Repetitionen nach Bedürfnis. — 10) Gesang, s. Ober-Prima. 11) Zeichnen, s. Ober-Prima.

### Ober-Secunda. Ordinarius: Oberlehrer Meckbach.

1) Deutsch, 2 St. Meckbach. Geschichte der deutschen Literatur von Opitz bis Lessing. Alle 6 Wochen ein Aufsatz. Übungen im freien Vortrage. — 2) Latein, 8 St. Meckbach. Cic. pro Roscio, pro Dejotaro. Retrovertit: Cic. pro Roscio, I—XX. Privatlektüre: Liv. XXVI. Grammat. nach Zumpt § 672—825. Wöchentlich ein Exercitium. Vierteljährlich ein Aufsatz. Extemporalien. — 2 St. Böhlmann. Virg. Aen. XI, XII, VIII. — 3) Griechisch,



4 St. Hecht. **Herod. VIII**, 1—150. Grammat. nach Buttmann. Casus- und Tempuslehre. Wiederholung der Etymologie. Alle 2 Wochen ein Exercitium, alle 6 Wochen ein Extemporale. — 2 St. Meckbach. **Hom. Od. IX—XII**. — 4) Französisch, 2 St. Fischer. Plöz 2. Cours, Lect. 56—78. Lektüre: **Théodose le Grand p. Fléchier**. Alle 14 Tage ein Exercitium. — 5) Hebräisch, 2 St. Schiekopp. Elementar- und Formenlehre, vom Pron., regelmäÙ. Verb. und Nomen. Lektüre der Uebungs- und Vefestücke Nr. 8—12. Monatlich schriftliche Uebung in der Formenlehre. — 6) Religion, 2 St. Schiekopp. Einleitung in die heil. Schrift. Evangel. Johannis. Wiederholung der Kirchenlieder und der 5 Hauptstücke. — 7) Mathematik, 4 St. Milinowski. Trigonometrie. Wiederholungen aus der Planimetrie. Alle 14 Tage eine schriftliche Arbeit. — 8) Physik, 1 St. Milinowski. Von der Wärme. — 9) Geschichte u. Geographie, 3 St. Fischer. Römische Geschichte bis Augustus. Wiederholung der griechischen und vaterländischen Geschichte. Geographie von Alt-Italien, Amerika, Afrika. — 10) Gesang, f. Ober-Prima. — 11) Zeichnen, f. Ober-Prima.

#### **Unter-Secunda. Ordinarius: Gymnasiallehrer Skrodzki.**

1) Deutsch, 2 St. Schiekopp. Poetik, besonders epische und lyrische Poesie, mit Mustern aus der deutschen Literatur. Uebungen im Disponiren und freien Vortrage. Alle 6 Wochen ein Aufsatz. — 2) Latein, 8 St. Skrodzki. **Liv. V**, **Cic. Cat. M.** Privatim: **Nepos**, **Liv. I**, 1—30. Grammatik: Zumpt § 493—671. Retrovertirt: **Liv. V**, 1—15, **Cic. Cat. M.** 1—8. Wöchentlich ein Exercitium und Extemporale. — 2 St. Meckbach. **Virgil. Aen. VII u. VIII**. — 3) Griechisch, 6 St. Hecht. **Herod. VII**, 100 b. 3. Ende. **Hom. Od. XXIV. u. XIII**. Grammatik nach Buttmann. Casuslehre und Wiederh. der Etymologie. Alle 2 Wochen ein Exercitium, alle 6 Wochen ein Extemporale. — 4) Französisch, 2 St. Fischer. Plöz II. Cours., Lect. 29—50. Lektüre: **Alexandre le Grand p. Rollin**. Alle 14 Tage ein Exercitium. — 5) Hebräisch, komb. mit Ober-Secunda. — 6) Religion, 2 St. Schiekopp. Alte Kirchengeschichte bis auf Gregor d. Gr. Evang. Lucä und die evang. Perikopen. Wiederh. der Kirchenlieder und der 5 Hauptstücke. — 7) Mathematik, 4 St. Milinowski. Anwendung der Algebra auf Geometrie. Von geometrischen Orten. Wiederhol. der Lehre von der Ähnlichkeit der Figuren. Die Gleichungen des ersten u. zweiten Grades. Alle 14 Tage eine schriftliche Arbeit. — 8) Physik, 1 St. Milinowski. Von den mechanischen Eigenschaften der Körper. — 9) Geschichte und Geographie, 3 St. Fischer. Griech. Geschichte bis zum Tode Alexanders d. Gr. Wiederh. der römischen und vaterländischen Geschichte. Geographie von Alt-Griechenland, Asien, Australien. — 10) Gesang, f. Ober-Prima. — 11) Zeichnen, f. Ober-Prima.

#### **Ober-Tertia. Ordinarius: Dr. Fischer.**

1) Deutsch, 2 St. Hahn. Lehre vom zusammengesetzten Satz. Wiederholung der Interpunktionslehre. Erklärung größerer Gedichte. Wöchentliche Uebungen im Deklamiren u. freien Vor-

trage. Disponirübungen. Monatlich ein Aufsatz. — 2) Latein, 6 St. Strodzki. *Caes. bell. civ. I u. II.* Retrovertirt: *Caes. bell. civ. I*, 1—30. Wöchentliche Extemporalien aus Cüpfle, *Th. I*, Nr. 160—214, I—VI. — 4 St. Hecht. Grammatik nach Zumpt. Das Wichtigste aus der Tempus- und Moduslehre. Wiederhol. der Kasuslehre u. der Etymologie. Alle 8 Tage 1 Exercit. nach Cüpfle *I. Cours*. Alle 3 Wochen 1 Extempor. *Ovid. Metam. IV*, 50—150. *XI*, 40—110. 350—550. *XIII*, 1—100. In jeder 3. Stunde wurden 6 Verse memorirt. — 3) Griechisch, 4 St. Hecht. *Xenoph. Anab. III*, 2 bis zum Schluß u. *IV*, 1, 2. Gramm. nach Buttman. Die *verba anomala* § 114 und Repetition der Etymologie. Alle 14 Tage 1 Exerc., alle 6 Wochen 1 Extempor. — 2 St. der Direktor. *Hom. Od. XV, XVI*. Gelernt wurde *XV*, 60—180. 4) Französisch, 2 St. Fischer. Plöz II. *Cursus*, Lect. 1—28. Lektüre: *Charles XII. p. Voltaire*. Alle 14 Tage ein Exercitium. — 5) Religion, 2 St. Schiekopp. 2. u. 3. Artikel, 4. u. 5. Hauptstück des Katechismus erklärt, die anderen wiederholt. Bibelsprüche, ausgewählte Psalmen u. Kirchenlieder gelernt. Geschichte der Reformat. nach Wangemann's Lutherbüchlein. Das evangelische Kirchenjahr. — 6) Mathematik, 4 St. Reuter. Wiederhol. der Kreislehre. Von der Proportionalität gerader Linien und der Ähnlichkeit geradliniger Figuren. *Ramblh* § 128—152. Lehre von den Proportionen. Potenzen. Alle 14 Tage eine häusliche Arbeit. — 7) Geschichte u. Geographie, 4 St. Kossinna. Preussisch-brandenburgische Geschichte. Geographie von Deutschland, Holland, Belgien, der Niederlande u. Schweiz. — 8) Gesang, 1 St. Collin. Die Tenor- und Alto-Stimmen übten die Chöre zur 4stimmigen Singklasse. — 9) Zeichnen, 2 St. Rehberg, f. Ober-Prima.

#### Unter-Tertia. Ordinarius: Oberlehrer Dr. Kossinna.

1) Deutsch, 2 St. Plew. Interpunktion und Satzlehre. Lektüre: Hermann und Dorothea und Lesebuch von Hopf und Paulsief. Erklären und Deklamiren von Gedichten des Lesebuchs, besonders Schiller'scher Balladen. Vierwöchentlich ein Aufsatz. — 2) Latein, 8 St. Kossinna. *Caesar. bell. Gall. IV. u. V.* Retrovertirt wurde *IV*, 1—20 und *V*, 1—12. Grammatik nach Zumpt. Repetition der Elementarlehre. Syntax bis § 492. Uebungen im mündlichen Uebersetzen aus dem Deutschen ins Lateinische, und wöchentlich ein Exercitium aus Cüpfle. — 2 St. Plew. *Ovid. Metam. lib. III.* Memorirt wurde *III.*, 1—92. — 3) Griechisch, 6 St. Plew. Gramm. nach Buttman. Repetition des Pensums von Quarta, dann § 105—109. Lektüre *Jacobs II. Cours*; Länder- und Völkerkunde von Abschnitt II. ab. *Homer. Od. V*. Memoriren von Versen. Alle 14 Tage ein Exercitium oder Extemporale. — 4) Französisch, 2 St. Plew. Wiederholung von *avoir* und *être* und den wichtigsten Lectionen aus Plöz 1. *Cursus* 35—39. Durchnahme von Lect. 60—91. Lektüre im Lesebuch. Alle 14 Tage ein Exercitium oder Extemporale. — 5) Religion, 2 St. Schiekopp. Evang. Matthäi, besonders die Bergpredigt und Passionsgeschichte gelernt und erklärt; Kirchenlieder und Hauptstücke gelernt. — 6) Mathematik, 4 St. Reuter. Wiederholung und Vervollständigung der Lehre vom Dreieck (*Ramblh* § 61—69),



Lehre vom Kreise (Kambly § 82—110). Buchstabenrechnung. Alle 14 Tage eine schriftliche Arbeit. — 7) Geographie und Geschichte, 4 St. Hacht. Röm. Geschichte bis zur Schlacht bei Actium nach der Tabelle von Fischer. Geographie von Alt-Italien. Neuere Geographie: politische Geographie von Europa mit Ausschluß Deutschlands nach Seydlitz. — 8) Gesang, f. Ober-Tertlia. — 9) Zeichnen, f. Ober-Prima.

**Ober-Quarta. Ordinarius: Gymnasiallehrer Plew.**

1) Deutsch, 2 St. Hahn. Interpunktionslehre. Das Wichtigste aus der Satzlehre. Wöchentlich einmal Uebungen im Deklamiren. Kleine Aufsätze und Diktate. — 2) Latein, 8 St. Plew. Nepos: Timotheus, Epaminondas, Pelopidas, Agesilaus, Eumenes. Retrovertirt: Epaminondas. Grammatik nach Zumpt's Auszug. Die wichtigsten Regeln aus der Kasuslehre. Wiederholung der unregelmäßigen Verba, damit verbunden mündliche Uebungen im Uebersetzen aus Dronkes Aufgaben. Wöchentlich ein Exercitium oder Extemporale. — 2 St. Haase. Phaedrus lib. III. und V. Einige Fabeln wurden auswendig gelernt. — 3) Griechisch, 6 St. Hahn. Wiederholung der Deklination. Erlernung des regelmäßigen Verbums, einschließlich der Verba in *mu*. Buttman § 81—107. Lectüre: Jacob's Lesebuch VI, VIII, IX. X. — 4) Französisch, 2 St. Kownatzki. Einübung der Lektionen 40—60 aus Plöz Elementarbuch. Wiederholung von *avoir* und *être* und den früheren Lektionen. Alle 14 Tage ein Exercitium oder Extemporale. — 5) Religion, 2 St. Schickopp. Wiederholung der biblischen Geschichten des N. T., das 1. Hauptstück erklärt, die andern gelernt, ebenso Bibelsprüche und Kirchenlieder. — 6) Mathematik, 2 St. Reuter. Von den Linien, Winkeln, Parallelen und Dreiecken. Lösung der sich daran schließenden Aufgaben. (Kambly bis § 63.) Wöchentlich eine schriftliche Arbeit über Decimalbrüche und Regel-detri. — 7) Geschichte, 2 St. Hahn. Griechische Geschichte vom Anfang der Perserkriege bis zum Tode Alexanders d. Gr. — Geographie, 1 St. Hahn. Alte Geographie von Griechenland. Neuere Geographie von Amerika und Australien. — 8) Zeichnen, 2 St. Rehberg. Zeichnen nach ausgeführten Vorbildern. Fortsetzung der Elemente der Perspective. — 9) Schreiben, 2 St. Rehberg, mit III. und IV.b. combin. Für diejenigen, welche eine schlechte Handschrift haben, nach Vorschriften. — 10) Singen, 2 St. Collin. Wiederholung des Elementargesanges. Sopran und Alt übten die Chöre zur vierstimmigen Singklasse.

**Unter-Quarta. Ordinarius: Gymnasiallehrer Kownatzki.**

1) Deutsch, 2 St. Kownatzki. Lectüre aus Hopf und Paulsief Th. 1, Abth. 3, mit Anschluß der Regeln über den einfachen und zusammengesetzten Satz nebst der Interpunktionslehre. Alle 2 Wochen ein kürzerer Aufsatz nebst einem Diktat zur Uebung in der Orthographie. Deklamir-übungen einmal wöchentlich. — 2) Latein, 10 St. Kownatzki. Nepos: Miltiades, Themistocles, Aristides, Pausanias, Cimon. Retrovertirt: Miltiades, Themistocles. Repetition der Formenlehre nach Zumpt's Auszug. Einübung der unregelmäßigen Verba, angeknüpft an

die Lectüre die wichtigsten Regeln über die Casuslehre. Mündliche und schriftliche Uebungen im Uebersetzen aus Dronke's Aufgaben. Wöchentlich ein Exercitium oder Extemporale. **Phaedrus lib. I und II.** Einige Fabeln auswendig gelernt. — 3) Griechisch, 6 St. Rownazki. Buttman § 1—80. Buchstaben, Deklination des Nomen, Accentlehre, Comparation, Pronomina, Zahlwörter. Einleitung in die Lehre vom Verbum, Einübung von *ἔχω*. Lectüre: Jacobs I—VII, einzelne Stücke aus VIII. Schriftliche und mündliche Declinationsübungen, sowie Uebersetzen leichterer Sätze. — 4) Französisch, 2 St. Haase. Lect. 35—50 aus Bötz Elementarbuch; Wiederholung der wichtigeren vorhergehenden Lectionen. Einübung von *avoir* und *être*. Alle 14 Tage ein Exercitium. Extemporalien. — 5) Religion, 2 St. Gisevius. Die Zeit der Apostel, Ueberblick des Kirchenjahres, Beschreibung des gelobten Landes, das Wichtigste über Luther. Memorirt wurden Bibelsprüche und Liederverse und mehrere Kirchenlieder. — 6) Mathematik, 3 St., bis Neujahr Meckbach, seit Neujahr Reuter. Lehre von den geraden Linien, Winkeln und Dreiecken. Zusammengefügte Regeldetri und Dezimalbruchrechnung. — 7) Geschichte und Geographie, 3 St. Haase. Geographie von Alt-Griechenland. Griech. Mythologie und Geschichte im Anschluß an Fischer's Tabelle bis 466. Geographie von Asien und Afrika nach Seydlitz. Repetition von Europa. — 8) Zeichnen, 2 St. Rehberg. Zeichnen nach leichten, ausgeführten Vorbildern kleiner Landschaften, Köpfe etc. Fortsetzung der Elemente der Perspective. — 9) Schreiben, 2 St. Rehberg, mit III. und IV.a. comb. — 10) Singen, f. Ober-Quarta.

#### Quinta. Ordinarius: Dr. Haase.

1) Deutsch, 2 St. Haase. Die Lehre vom einfachen Satz. Lectüre aus Hopf und Pauls's Lesebuch für Quinta. Erlernung von Gedichten, Deklamirübungen. Alle 14 Tage ein Diktat oder eine kleine Arbeit. — 2) Latein, 10 St. Haase. Grammatik: Repetition des Pensums der Sexta. **Verba anomala** und **defectiva**, unregelmäßige **verba** und **deponentia** (Zumpt's Auszug § 44—230). Bonnel: St. 1—17. Lectüre aus Jacob's Lesebuch: II. Cursus III, 1—75. Wöchentlich ein Exercitium. — 3) Französisch, 2 St. Haase. Bötz Elementarbuch, Lect. 1—35. Alle 14 Tage ein Exercitium. — 4) Religion, 3 St. Gisevius. Die Geschichten des A. T. zu Ende, die Geschichten des N. T. mit Auswahl; memorirt wurden die dazu gehörigen Bibelsprüche und Liederverse, das 2. Hauptstück und mehrere Kirchenlieder. — 5) Rechnen, 4 St. Reuter. Bruchrechnung mit Anwendung auf benannte Zahlen. Elemente der Dezimalbruchrechnung im Anschlusse an die neuen Maße und Gewichte. Regeldetri. — 6) Geographie, 2 St. Rownazki. Wiederholung des Pensums von VI. Nothwendigste Grundbegriffe aus der mathematischen Geographie, allgemeine Uebersicht über die feste und flüssige Erdoberfläche. Globus. Das Wichtigste aus der politischen Geographie Europas mit besonderer Berücksichtigung des preussischen Staates nach Preuß. — 7) Naturkunde, 2 St. Reuter. Zoologie (Allgemeine Uebersicht; Vögel). — 8) Zeichnen, 2 St. Rehberg. Elemente der Perspective. Freihandzeichnen nach Wandtafeln und Vorlegeblättern. — 9) Schreiben, 2 St. Rehberg. Deutsche und lateinische Schrift nach Vor-



schriften. — 10) Singen, 2 St. Collin. Elementarübungen im Treffen der Intervalle, Tonarten und deren Tonleitern. Sopran die Chöre zur vierstimmigen Sing-Klasse.

### **Ober-Sexta. Ordinarius: Gymnasiallehrer Hahn.**

1) Deutsch, 4 St. Kleinschmidt. Lehre von den wichtigern Wortarten und dem einfachen Satze. Übungen im Lesen und Wiedererzählen aus Hopf und Paulsief. Orthographische Übungen, kleine Aufsätze und Deklamirübungen. — 2) Latein, 9 St. Hahn. Deklination, Comparation d. *adject.* u. *adverb.* Regelm. Conjugation und die bekannteren unregelm. *verba.* Übungen im Uebersetzen nach dem *Tirocinium* St. 17—86. Kleine Exercitien. In den 2 mit Unter-Sexta comb. Stunden: Übungen im Dekliniren u. Konjugiren. — 3) Religion, 3 St. Gisevius. Die Geschichten des A. T. bis zur Rückkehr aus dem babylonischen Exil; memorirt wurden die zu den Stücken gehörigen Bibelsprüche und Liederverse, das erste Hauptstück und mehrere Kirchenlieder. — 4) Rechnen, 4 St. Kleinschmidt. Die 4 Species mit benannten Zahlen, Zeitrechnung, Addition u. Subtraction ungleichnamiger Brüche. — 5) Geographie, 2 St. Plew. Die Hauptlehren aus der mathematischen und physischen Geographie, und allgem. Geographie v. Europa. 6) Naturkunde, 2 St. Reuter. Beschreibung einzelner Säugethiere. — 7) Zeichnen, 2 St. Rehberg. Zeichnen an der Tafel nach mündlichem Vortrage, nach Wandtafeln und Vorlegeblättern. — 8) Schreiben, 2 St. Rehberg. Schreiben nach Vorschriften. — 9) Singen, 2 St. Collin. Gehör- und Stimmübungen; Kenntniß der Noten und Pausen. Werth derselben, Takt- und Versetzungszeichen. Leichte Intervallenübungen. Die Choräle und Chöre für die vierstimmige Singklasse wurden mit den Sopranstimmen geübt.

### **Unter-Sexta. Ordinarius: Kleinschmidt.**

1) Deutsch, 4 St. Kleinschmidt, mit Ober-Sexta. Kenntniß der wichtigern Redetheile und der Hauptregeln der Orthographie. Übungen im Lesen, Wiedererzählen und Deklamiren aus Hopf und Paulsief. — 2) Latein, 8 St. Gisevius. Die ersten 65 Stücke aus dem *Tirocinium* vertirt und retrovertirt. Memorirt wurden 12 Stücke. Die 5 Deklinationen, die *Abjectiva*, *Pronomina*, Zahlwörter, *sum* und die 4 Conjugationen. — 3) Rechnen, 4 St. Kleinschmidt, mit Ober-Sexta. Die 4 Species mit benannten Zahlen. Kopf- und Bruchrechnung. 4) Religion, combin. mit Ober-Sexta. — 5) Geographie, combin. mit Ober-Sexta. — 6) Schreiben, 4 St., 2 combin. mit Ober-Sexta, Rehberg. Schreiben nach Vorschriften. — 7) Singen, 2 St. Collin, comb. mit Ober-Sexta.

## **Vorbereitungs-Schule.**

### **1. Klasse. Ordinarius: Kleinschmidt.**

1) Deutsch, 4 St. Kleinschmidt. Die wichtigsten Redetheile. Deklination, Comparation und Conjugation. Übungen im Wiedererzählen und Deklamiren; kleine Dictate und täglich Ab-

schreibübungen. — 2) Rechnen, 4 St. Derselbe. Die 4 Species in unbenannten Zahlen. Resolviren und Reduciren. Einfache Schlußrechnungen. — 3) Lesen, 6 St. Derselbe. Münsterberger Lesebuch, 2. Theil. — 4) Singen, 1 St. Derselbe. Gehör- und Stimmübungen, leichte Volkslieder. — 5) Anschauungs- und Denkübungen, 2 St. Derselbe. Erweiterung der Vorstellung, geknüpft an Gegenstände aus dem Anschauungskreise der Kinder. Übungen im Denken und richtigen Sprechen. — 6) Schreiben, 4 St. Rehberg. Mit der zweiten Klasse combinirt. Fortgesetzte Übung in deutscher und lateinischer Schrift. — 7) Religion, 3 St. Gisevius. Die Geschichten des A. T. bis zu Moses, aus dem N. T. die auf die kirchlichen Feste bezüglichen Stücke; memorirt wurden außer dem Morgen- und Abendsgebet noch kleine Gebete und mehrere Kirchenlieder.

## 2. Klasse. Ordinarius: Tolschmitt.

1) Religion, 3 St. Tolschmitt. Die in R. Materne „Für den ersten Religionsunterricht“ enthaltenen bibl. Geschichten des A. T. wurden mit den Kindern eingeübt und zum sichern Eigenthum derselben gemacht. Memorirt wurden kleine Gebete und Liederverse. — 2) Lesen, 6 St. Derselbe. Münsterberger Lesebuch, 2. Theil. — 3) Deutsch, 2 St. Derselbe. Wort- und Sacherklärung gelesener Stücke; kleine Regeln über die Rechtschreibung, tägliche Abschreibübungen. Einige Gedichte wurden gelernt. — 4) Rechnen, 4 St. Derselbe. Die 4 Species im Zahlendreieck von 1—100. Einführung in den größeren Zahlendreieck. Addiren und Subtrahiren. — 5) Schreiben, 4 St. Rehberg. Mit der 1. Klasse combinirt. — 6) Anschauungs-Unterricht, 1 St. Tolschmitt. Dinge, die dem Anschauungskreise der Kinder entnommen waren, boten Stoff zu Übungen im Anschauen, Denken und Sprechen. — 7) Singen, 1 St. Kleinschmidt. Mit der 1. Klasse combinirt.

## 3. Klasse. Ordinarius: Tolschmitt.

1) Religion, 2 St. Tolschmitt. Die bibl. Geschichten nach Materne von der Schöpfungsgeschichte bis zu den Geschichten von Joseph. — 2) Lesen und Schreiben, 10 St. Derselbe. Das Lesen wurde auf dem Wege des Lantirens und nach der sogenannten Schreiblese-Methode gelehrt. Als Übungsbuch diente Haester's Bibel. Mit dem Lesen zugleich wurde der Rechtschreibung wegen noch das Buchstabiren geübt. Das Schreiben wurde mit dem Lesen zugleich gelehrt. — 3) Rechnen, 4 St. Derselbe. Die 4 Species im Zahlendreieck von 1—10. Einführung in den Zahlendreieck von 1—100. Addiren und Subtrahiren.

Littauisch, 4 St. Gisevius. Achtzig Psalmen wurden vertirt und zum Theil retrovertirt, außerdem ein Buch aus dem A. T. und zwei Evangelien. Memorirt wurden 6 Kirchenlieder und ein Hauptstück. Zur Übung im Schriftlichen wurde alle 14 Tage ein Extemporale und vierteljährlich ein freier Aufsatz gefertigt.

Englisch, 4 St. in zwei Abtheilungen, Fischer. II. Abth.: Grammatik nach Georg. Lektüre: *Life in the Wilds* v. Martineau. I. Abth.: Grammatik nach Georg. Lektüre: *Julius Caesar* von Shakspere.



Turnen: Meckbach. Der Turnunterricht wurde im S. u. W. in 8 wöchentlichen Stunden ertheilt, so daß immer je zwei Klassen zusammen 2 Stunden wöchentlich beschäftigt wurden. Das Schulturnfest fand am 20. December Statt und wurden unter die Schüler 53 Preise vertheilt.

### Themata für die Abiturienten-Arbeiten.

I. Deutscher Aufsatz: Was ist des Studirenden bester Schatz und bester Schutz?

II. Lateinischer Aufsatz: *Nullam funestiorum civitatibus exstitisse pestem quam discordiam civilem, ex rebus gestis Graecorum et Romanorum illustratur.*

III. Mathematische Arbeit: 1) Zur Construction eines Dreiecks sind gegeben: eine Seite und die Radien des ein- und umgeschriebenen Kreises. — 2) Zur Berechnung eines Dreiecks sind gegeben: Der Radius des eingeschriebenen Kreises, die Summe zweier Seiten und der Radius des äußern Berührungstreifes, der die dritte Seite nicht in der Verlängerung berührt. — 3) In eine Kugel von gegebenem Radius  $r$  soll von allen 3seitigen Prismen mit rechtwinklig gleichschenkliger Grundfläche dasjenige gestellt werden, welches die größte Oberfläche hat. Wie verhält sich die Höhe desselben zu einer Kathete der Oberfläche? — 4) In eine Kugel  $K$  ist ein regelmäßiges Tetraeder construirt, in dieses wieder eine Kugel, in diese ein zweites Tetraeder u. s. w. Wie groß ist die Summe aller Kugeln und wie groß die Summe aller Tetraeder? —

### Themata für die freien Arbeiten in Prima und Secunda 1871—1872.

I. Deutsche Aufsätze. A. In Ober-Prima: 1) Gute Bäume tragen zeitig. — 2) Schnell fertig ist die Jugend mit dem Wort. — 3) Der Erfolg ist auch ein Gottesurtheil. (Klassenarbeit.) — 4) Des Lebens Mühe lehrt uns allein des Lebens Güter schätzen. — 5) Was ist des Studirenden bester Schatz und bester Schutz?

B. In Unter-Prima: 1) a. u. b. Welchen Vorzügen verdankt Schiller's Glocke die große Popularität, welche sie bei den Deutschen genießt? — 2) a. u. b. Ueber Ursprung und Werth der Sprichwörter. (Klassenarbeit.) — 3) a. Wie ist der zweite Titel von Lessing's Minna von Barnhelm: „das Soldatenglück“ zu verstehen? b. Vergleichende Charakteristik der Göthe'schen, Schiller'schen und Uhland'schen Balladen- und Romanzendichtung. 4) a. Durch wiederholte Streiche fällt auch die stärkste Eiche. b. Wie man in den Wald ruft, so schallt es heraus. — 5) a. 1. Erst wäge, dann wage! 2. Ueber die Selbstachtung. b. 1. „Willst Du glücklich sein hienieden, — Wünsche nimmer es zu sein!“ 2. Ueber die Selbstbeherrschung.

C. In Ober-Secunda: 1) Aller Anfang ist schwer. — 2) Wodurch wurde Cicero bestimmt, die Vertheidigung des Sextus Roscius aus Ameria zu übernehmen (nebst angehängter Uebersetzung der beiden ersten Capitel dieser Vertheidigungsrede). — 3) Zwischen heut' und morgen liegt eine lange Frist. — 4) Bezeichnend für den Charakter der Menschen ist das, was sie lächerlich finden. — 5) Wahre Tugend findet schon hier auf Erden wahren Lohn.

D. In Unter-Secunda: 1) a. Das Erntefest, eine Schilderung. b. Die Gefahren des Reichthums. — 2) a. Schilderung einer Jagd (Nibelungenlied 16. Abent.). b. *Aurora Musis amica*. — 3) a. Die Entdeckung Amerikas und ihre Folgen. b. Gutenberg und seine Verdienste. — 4) a. Das Landleben im Winter. b. Einfluß des Ackerbaus auf die Cultur. — 5) Das Landleben im Frühlinge. (Klassenarbeit.)

II. Lateinische Aufsätze. A. In Ober-Prima: 1) *Eloquentia cur apud Graecos et Romanos potissimum floruerit?* — 2) *Maximum fidei vinculum esse melioribus parere* (Liv. XX, 13). — 3) *Aequam memento rebus in arduis — Servare mentem* (Hor. od. II, 3.) (Klassen-Arbeit). — 4) *Ea fato quodam dato Romanis sors fuit, ut omnibus magnis bellis victi vincerent.* 5) *Romanae reipublicae quae fuerint formae et quomodo altera alteram secuta sit.*

B. In Unter-Prima: 1) a. *Fieri posse, ut bella rebus populorum salutaria sint, et argumentis et exemplis demonstratur.* b. *Qui factum sit, ut Romani rerum nauticarum laude minus florent.* — 2) a. *Quattuor res, quas Cicero dicit, in imperatore inesse oportere: scientiam rei militaris, virtutem, auctoritatem, felicitatem summas fuisse in Caesare.* b. *Romam urbem Romulus condidit, Camillus restituit, Cicero servavit.* — 3) a. *Brevi enarrantur causae et res gestae belli Punici secundi* (Klassen-Arbeit). b. *Unus homo cunctando rem Romanam restituit* (Klassen-Arbeit). 4) a. *Audendum est: fortes adjuvat ipse deus.* b. *Utrum res bellicae, an urbanae pluris aestimandae sint.* — 5) a. u. b. *Athenienses bene de patria, melius de universa Graecia, de genere humano optime meruisse.*

C. In Ober-Secunda: 1) *Argumentum libri secundi Aeneidis breviter enarretur.* — 2) *Themistoclis oratio habita in contione sociorum ante pugnam Salaminiam.* — 3) *Omne genus virorum magnorum Athenas tulisse.*

## B. Amtliche Verordnungen.

Vom 15. August 1871: Anzeige, daß Herr Rümter am 1. Oktober als 4. ordentlicher Lehrer des Gymnasiums in Gumbinnen versetzt wird. — Vom 31. August: Anzeige, daß am 1. Oktober in Rümter's Stelle der Schulamts-Kandidat Reuter eintreten und zugleich sein Probejahr abhalten wird. — Vom 9. September: Pakete sollen in der Folge mit der Adresse des Begleitbriefes signirt werden. — Vom 23. September: Abschrift der Bekanntmachung der General-Direktion der Wittwen-Verpflegungs-Anstalt: Aufnahme-Anträge werden nur berücksichtigt, wenn sie mit den vorschriftsmäßigen Attesten versehen im Laufe der Monate September und März eingehen. — Vom 16ten Oktober: Die jährlichen Berichte über Personal-Veränderungen sollen sich nur auf die definitiv angestellten Lehrer beziehen. — Vom 29. November: Vom 1. Januar 1872 ab sollen zur Frankirung der Postsendungen in Staats-Angelegenheiten die gewöhnlichen Postfreimarken benutzt werden. — Vom 30. November: Mittheilung, daß der Herr Minister sich geneigt erklärt hat, das Loobesche Grund-



stück für das Gymnasium anzukaufen, und Auftrag, mit Toobe wegen der Bedingungen zu verhandeln. Vom 7. Januar 1872: Den Direktoren der Gymnasien u. Realschulen wird die sorgfältige Einhaltung der Normal-Frequenz zur Pflicht gemacht. Zu diesem Zwecke soll nicht nur die Aufnahme neuer Schüler auf das unumgängliche Maß beschränkt, sondern auch solche Schüler, welche nach Vollendung des doppelten Klassen-Kurses die Reife zur Versetzung nicht erlangt haben, von der Anstalt entfernt werden. — Vom 17. Januar: Dem Oberlehrer Pöhlmann wird wegen seiner Augenkrankheit bis zum Schluß des Quartals der nachgesuchte Urlaub bewilligt. — Vom 22. Februar: Abschrift des Schreibens an das Kommando des hiesigen Dragoner-Regiments, worin der Kontrakt wegen Mitbenutzung des Gymnasial-Turnlokals gekündigt und die Rückstände niedergeschlagen werden. — Vom 28. Februar: Nach Königsberg sollen künftig 340 Programme geschickt werden.

### C. Chronik des Gymnasiums.

Der Unterricht wurde im Sommer des vorigen Jahres geschlossen am 29. Juli und begann wieder am 7. September. Das diesjährige Winterhalbjahr schließt mit dem 22. März.

Am 1. Oktober 1871 wurde zu unserm allgemeinen Bedauern Herr Kümmler nach dem Gymnasium in Gumbinnen versetzt. An seine Stelle trat Herr Schulamts-Kandidat Reuter, der hier zugleich sein Probejahr abhält.

Der Gesundheitszustand der Schüler war günstiger, als im letzten Schuljahre, doch haben wir auch diesmal den Tod von zwei hoffnungsvollen Knaben zu beklagen. Es starb am 7. Oktober 1871 der Unter-Quartaner Ludwig Mach am Nervenfieber und wurde am 11. Oktober von der Schule zu Grabe begleitet. Am 26. Februar 1872 starb der Ober-Quintaner Paul Böttcher bei seinen Eltern in Heinrichswalde an einem Brustleiden. Von den Lehrern wurde Herr Oberlehrer Pöhlmann genöthigt, zur Kur eines plötzlich hervorgetretenen bedenklichen Augenleidens um Urlaub für das erste Quartal d. J. zu bitten. Nachdem die Kur anfangs von günstigem Erfolge begleitet war, ist leider in der letzten Zeit wieder eine ungünstige Wendung der Krankheit eingetreten. Der Gesundheitszustand der übrigen Lehrer war allgemein befriedigend.

Die Temperatur war während des ganzen Winters milde, so daß der Unterricht wegen zu großer Kälte nie unterbrochen werden durfte. Am 14. September feierte die Schule, wie gewöhnlich zugleich mit den andern Schulen der Stadt, das heilige Abendmahl. Es theilnahmen dabei von Seiten der Lehrer und ihrer Familien 33 Personen, von den Schülern 52.

Schillers Werke in 4 Bänden, ein Geschenk des Schiller-Vereins, erhielt der Ober-Primaner Rudolph Drophner.

## D. Statistische Nachrichten.

a. Lehrer (f. Tabelle pag. 49).

b. Schüler.

Am Schlusse des vorigen Schuljahres den 29. Juli 1871 waren im Gymnasium 418 Schüler, in der Vorschule 71. Jetzt sind im Gymnasium 425, in der Vorschule 73.

Beim Schluß des Unterrichts	Gymnasium.													Vorschule.			Sa.
	D. I.	II. Ia.	II. Ib.	D. II.	II. II.	D. III.	II. III.	D. IV.	II. IV.	V. a. b.	D. VI.	II. VI.	I.	II.	III.		
am 22. März 1872	28	23	20	33	41	49	61	41	29	50	30	20	35	17	21	498	
Hiesige . . . . .	11	9	15	11	18	24	34	26	15	32	13	14	24	14	18	278	
Auswärtige . . . .	17	13	5	21	22	24	26	15	14	17	16	6	9	3	3	211	
Ausländer . . . . .	—	1	—	1	1	1	1	—	—	1	1	—	2	—	—	9	
Evangelische . . . .	28	21	20	33	39	48	53	32	27	47	29	18	32	16	19	462	
Katholische . . . .	—	—	—	—	2	—	1	—	—	—	—	1	—	—	—	4	
Israeliten . . . . .	—	2	—	—	—	1	7	9	2	3	1	1	3	1	2	32	
Unter 14 Jahren	—	—	—	—	3	10	31	35	27	48	30	20	35	17	21	277	

Aufgenommen sind seit dem 29. Juli 1871 ins Gymnasium 46 (darunter 14 aus der Vorschule), abgegangen 39. In die Vorschule sind aufgenommen 18, abgegangen 16; unter diesen 14 nach dem Gymnasium.

Am 11. März wurde unter dem Vorsitze des Herrn Provinzial-Schulraths Dr. Schrader das mündliche Abiturienten-Examen abgehalten. Das Zeugniß der Reife erhielten:

Laufende Nr.	N a m e n.	Lebens- Alter. Jahre.	Jahre		Stand des Vaters.	Fach.	Universität.
			im Gymnasium	in I.			
333	Albert Blankenstein . .	21 1/2	8 1/2	2	Gutsbesitzer	Medizin	Königsberg.
334	Eduard Gensch . . . . .	19	5	2	Pfarrer	Philologie	Königsberg.
335	Bernhard Heinemann †	19	5 1/2	2	(Ver.-) Direktor	Jura u. Cam.	Königsberg.
336	Louis Hirsch . . . . .	18 1/4	7	2	Pfarrer	Medizin	Königsberg.
337	Carl Jürgens . . . . .	17	4	2	Polizei-Anw.	Philologie	Königsberg.
338	Robert Klotow . . . . .	21 1/2	8 1/2	3	Landfch.-Rath	Postfach	Königsberg.
339	Franz List . . . . .	18 3/4	7	2	Gerichtsrath	Jura	Königsberg.
340	August Reiß . . . . .	19	8	2	Pfarrer	Jura	Königsberg.
341	Clemens Dilesch . . . . .	20	4 1/2	2	Kreis-Kassen- Rendant	Medizin	Berlin.
342	Georg Radke † . . . . .	20	7	2	Gutsbesitzer	Jura u. Cam.	Leipzig.
343	Hugo Schmidt . . . . .	18	9	2	Bibliothekar	Techniker	Königsberg.
344	Heinrich Weßkallnies . .	21 1/2	7	2 1/2	Gutsbesitzer	Jura	Königsberg.

Anm.: Die mit † Bezeichneten wurden vom mündlichen Examen entbunden.



## E. Lehrapparate.

Zur Lehrerbibliothek sind als Geschenke eingegangen: Von Sr. Excellenz dem Herrn Kultus-Minister: **Genesis Graece**. — Anmerkungen zur griechischen Uebersetzung der Perikopen v. Prof. Dr. theol. Paul de la Garde in Göttingen. — Rheinisches Museum für Philologie Bd. XXVI. Neue Folge. — Haupt, Zeitschrift für Deutsches Alterthum. Neue Folge Bd. III. Heft III. — Von der Buchhandlung Dietrich Reimer in Berlin: Kiepert's kleiner Schulatlas. — Von der Lüdewitz'schen Buchhandlung (Carl Habel): Übungsbuch für den ersten Unterricht in der lateinischen Sprache von H. Pottenroth 6. Aufl. — Uebersicht der vaterländischen Geschichte von Dr. C. Wolff. — Von den Gebrüdern Ribbeck: Erinnerungen an E. F. G. Ribbeck, aus seinen Schriften herausgegeben von B. Ribbeck, Ober-Reg.-Rath in Berlin. — Von der Buchhandlung Franz Vahlen in Berlin: Geschichte des Deutschen Volks von Dr. D. Müller. — Von der Buchhandlung Carl Habel: Leitfaden für den geogr. Unterricht höherer Lehranstalten von H. Viehhoff 1. Lehrstufe 1. Aufl., 2. Lehrstufe 4. Aufl.

Den geehrten Gebern spricht die Schule den verbindlichsten Dank aus.

Aus eigenen Mitteln wurden angeschafft: Schmitz, Encyclopädie der neueren Sprachen. — Unden, Staatslehre des Aristoteles. — Göll, Kulturbilder. — A. Persius, Flaccus' Satyren. — Watterich, der deutsche Name Germanen. — Teuffel, römische Literatur. — Wegel, allgemeine Himmelskunde. — Rochau, Geschichte des deutschen Landes und Volkes. — Lammig, Geschichtswandtafeln V—VIII u. X. XII, a. b. IX, XI a.—c. — Lang, Martin Luther. — Martus, mathematische Aufgaben II. — Kohlrausch, Leitfaden der praktischen Physik. — Schell, Theorie der Bewegung. — Schellen, Elektromagnetischer Telegraph. — Lemis, Synopsis der drei Naturreiche I, II. — Lit. Centralblatt für 1871. — Neue Jahrbücher für Philologie Jahrg. 1871. — Schlömilch, Zeitschrift für Mathematik Jahrg. 1871. — Zeitschrift für deutsche Philologen III. — Petermann, geographische Mittheilungen Jahrg. 1871, Heft 1—10. — Sybel, histor. Zeitschrift Jahrg. 1871. — Zöckler, Augsburg. Konfession. — Kühnast, Hauptpunkte der livianisch. Syntax. — Stiehl, Centralblatt Jahrg. 1871. — Müller, politische Geschichte der Gegenwart II, III. — Winterfeld, Krieg 1870—71. — Zeitschrift für Gymnasialwesen Jahrg. 1871. — Naue, Formenlehre der lat. Sprache. — Altpreussische Monatschrift Jahrg. 1871. — Beer und H., Fortschritte des Unterrichts. — Müller, Zeitschrift für Geschichte Jahrg. 1871. — Cornelius Nepos ed. Halm. — Deutsche Dichter des 16. Jahrh. III. V. — Keller und H., Horatii Flacci opera I—II. — Spiegel, Iranische Alterthumskunde. — Peschel, Probleme der vergleichenden Erdkunde. — Grimm, deutsches Wörterbuch IV. u. V. Bd. — Chasles, Geschichte der Geometrie. — Wiese, deutsche Bildungsfragen. — Briefe über Berliner Erziehung. — Philolog. Anzeiger III. Bd. — Richter, Emancipation der Schule. — Prätorius, *deliciae prussicae* ed. Pierson. — Schmidt, Encyclopädie des Unterrichtswesens Heft  $77\frac{1}{2}$ . — *Anthologia latina* ed. Niese. — *Philostrati opera* ed. Kayser. — Westphal, method. Grammatik der griech. Sprache. — Ritter, Sophokles' König Oedi-

pus. — Peter, histor. roman. — Callimachea ed. Schneider. — Aeneae Commentarius Poliorceticus ed. Hayn. — Hergberg, Feldzug der 10,000 Griechen. — Bojanowski, Geschehenes und Geschriebenes. — Baron, der Deutschen Krieg und Sieg. — Sarcey, Belagerung von Paris. — Spezialberichte des Daily-News-Korrespondenten. — Strodtmann, Alldeutschland in Frankreich hinein I—II. — Pomtow, Leben der Spaminondas. — Kritische Betrachtungen über Niederlagen der Armeen. — Mengel, Roms Unrecht. — Sonnenburg, Krieg 1870—71. — Braun, „Während des Krieges“. — Schmidt, Monodien und Wechselgefänge. — Oppenheim, Friedensglossen im Kriegsjahr. — Kayßler, „Aus dem Hauptquartier“. — Klippel, Echarnhorst 3 Bde. — Hayn, Krieg Deutschlands gegen Frankreich. — Ranke, Ursprung des 7 jährig. Krieges. — Potthast, Friedrich Wilhelm III. — Stauriboi, Geschichte des deutsch-französischen Krieges. — Mengel, Geschichte des deutsch-französischen Krieges. — Kossbach, römische Hochzeits- und Ehedenkmal. — Overbeck, griech. Kunstdenkmäler I. — Martius u. M., Elemente der Krystallographie. — Schweizer, C. Taciti Germania. — Müllenhof, deutsche Alterthumskunde. — Catonis philosophi liber rec. Hauthal. — Sophoclis Ajax u. Oedipus v. Wolff. — Abel, Wortbildung. — Seiler, Homerslexikon. — Schellen, Maschinenlehre. — Sophoclis Ajax ed. Schneidewin.

Für die Schülerbibliothek sind pro 1871—72 angeschafft worden: F. Schmidt's Völkerbilder der alten Welt. — Fichte's Reden an die deutsche Nation. — Just. Möser's patriotische Phantasien. — Höltz's Gedichte. — Wegener's Nibelungenlied. — Wustemann, Göthe's Götz von Berlechingen. — Gervinus, Geschichte der deutsch. Dichtung I u. II. — Ad. Stahr's kleine Schriften I. — Paul Heyse's deutscher Novellenschatz. — Nieder zu Schutz und Trutz, 2 Bde. — Schirmacher's letzte Hohenstaufen. — Scherer's Geschichte des Elsass. — Gräffe's histor. Sagenbuch des preuß. Staates. — Fehner's Geschichte des deutschen Krieges. — Wicke's Krieg 1870—1871. — Die Wacht am Rhein. — Maurer's deutsches Heldenbuch. — Hartmann's Bilder aus Westphalen. — Mädler, der Himmel. — Läger, das Leben im Wasser. — Me, „Aus der Natur“. — Helmholtz, Faraday. — Tyndall's Wärme. — Tyndall's Schall. — Gathy's musikalisches Conversationslexikon. — Jugendschriften.

## F. Unterstützungsfonds.

Für den Lehrer-Wittwen- und Waisen-Unterstützungsfonds sind seit dem 31. Juli 1871 eingegangen:

		Ihl.	Sgr.	Ag.			Ihl.	Sgr.	Ag.
1	Von Frau Ferber . . . . .	2	—	—		Transport	14	—	—
2	„ Herrn Pfarrer Karponitz . .	5	—	—	5	Von Herrn Oberlehr. Dr. Kossinna	3	—	—
3	„ „ L. S. . . . .	5	—	—	6	„ „ „ Böhlmann .	3	—	—
4	„ „ Ferd. Barth . . . . .	2	—	—	7	„ „ „ Medbach .	5	—	—
		Latus	14	—			Latus	25	—



			Thl.	Sgr.	Pf.				Thl.	Sgr.	Pf.
Transport			25	—	—	Transport			52	—	—
8	Von Herrn Oberlehrer	Schiefopp .	3	—	—	17	Von Hrn. Buchhändl.	Schubert & Seidel	37	25	6
9	"	" Gymn. Lehrer	Strodzki .	3	—	18	"	" Wehmeyer . . . . .	5	7	10
10	"	"	" Dr. Fischer . .	3	—	19	"	" Buchhändler	Vösch . .	3	18 3
11	"	"	" Hecht . . . . .	3	—	20	"	" Superintendenten	Behr .	2	— —
12	"	"	" Milinowski . .	3	—	21	"	" Oberlehrer	Heydenreich .	1	— —
13	"	"	" Plew . . . . .	3	—	22	"	" Pred.-A.-C.	Heydenreich .	1	— —
14	"	"	" Kownakki . . .	3	—	23	"	" Gutsbesitzer	Schwaller in		
15	"	"	" Rehberg . . . .	3	—			Derfchekmen . . .	2	— —	
16	"	"	" Hahn . . . . .	3	—	24	"	" Pfarrer	Gamradt . . .	2	— —
				3	—	25	"	" Fabian . . . . .	25	— —	
Latus			52	—	—	Summa			131	21	7

Im Laufe des vorigen Jahres sind von den Zinsen der im letzten Programm angegebenen Kapitalien, und den außerordentlichen Einnahmen wieder 400 Thlr. Kreisobligationen angekauft worden, so daß das ganze Kapital jetzt aus 1600 Thlr., hypothetarisch angelegt, 1200 Thlr. Kreisobligationen, einer Tilfiter Stadtoobligation à 50 Thlr. und 31 Thlr. 23 Sgr. 9 Pf. baar besteht. Dasselbe wird mit der Gymnasial-Kasse unter Einn.-Tit. II. B. und Ausgabe-Tit. VII. C. berechnet. Die oben angegebenen Einnahmen werden zum Bestande zugeschlagen und zum Ankauf einer neuen Kreisobligation verwandt werden.

Den geehrten Gebern spreche ich meinen verbindlichsten Dank aus.

Zum Schüler-Stipendienfonds sind seit dem 31. Juli v. J. eingegangen: von D.=I. 3 Thlr. 22 Sgr. 6 Pf., von U.=I. 5 Thlr. 17 Sgr., von D.=II. 5 Thlr. 26 Sgr. 6 Pf., von U.=II. 6 Thlr. 6 Sgr. 6 Pf., von D.=III. 7 Thlr., von U.=III. 8 Thlr. 26 Sgr., von D.=IV. 6 Thlr. 3 Sgr., von U.=IV. 4 Thlr. 3 Sgr., von V. 8 Thlr. 20 Sgr. 6 Pf., von D.=VI. 2 Thlr. 14 Sgr. 6 Pf., von U.=VI. 2 Thlr. 24 Sgr. 9 Pf., von den Schülern der Vorschule 5 Thlr. 9 Sgr. 3 Pf., im Ganzen 66 Thlr. 1 Sgr. 5 Pf.

Das Stipendium von 100 Thlr. haben die Studiosen Richter und Fried zu gleichen Theilen bezogen. Das ganze Kapital besteht jetzt aus 1400 Thlr., auf Hypothek angelegt, 1100 Thlr. Kreisobligationen und Bundesanleihe, und 19 Thlr. 29 Sgr. 1 Pf. baar.

## Verzeichniß der Schüler im letzten Tertial.

Ober-Prima.		
1. Robert Klosew aus Karnewischken.	5. Georg Radke aus Warsbuhnen.	10. Albert Blantenstein aus Ragnit.
2. Heinrich Wetschkalnies a. Uffördßen.	6. Bernhard Heinemann aus Tilfit.	11. August Reib aus Rautehmen.
3. Louis Hirsch aus Budweihen.	7. Michael Tarutis aus Platschen.	12. Arthur Redekty aus Tilfit.
4. Eduard Gensch aus Tilfit.	8. Carl Jörgens aus Wischwill.	13. Clemens Ollesch aus Tilfit.
	9. Franz Lin aus Tilfit.	14. Hugo Schmidt aus Tilfit.

15. August Borchstädt aus Gumbinnen.
16. Otto Weiß aus Bernauischken.
17. Hugo Naujoks aus Tilsit.
18. Rudolph Schupp aus Tilsit.
19. Hermann Schulz II. a. Leitwarren-  
Essen.
20. Emil Kraft aus Schirwindt.
21. Robert Hixigath aus Pläschken.
22. Rudolph Drochner aus Pelleninken.
23. Hugo Neumann aus Pilsfallen.
24. Christoph Jurschat a. Galbraffen.
25. Georg Schulz I. aus Tilsit.
26. Julius Herrendörfer aus Tilsit.
27. Albert Müller aus Kummetschen.
28. Otto Glinger aus Tilsit.

#### Unter: Prima A.

1. Louis Stern aus Tilsit.
2. Hermann Anbuhl aus Tollmings-  
fehen.
3. Christlieb Sturies a. Mallwischken.
4. Blücher Borchstädt aus Dawidshen.
5. Horst von Lynder aus Tilsit.
6. Arthur Willauer aus Tilsit.
7. Ludwig Lemke aus Tilsit.
8. Carl Wagner aus Schnecken.
9. Georg Petersen aus Tilsit.
10. Georg Hoffheinz aus Werden.
11. Oscar Regling aus Schorellen.
12. Max Ostermeyer aus Herdefrug.
13. Hermann Köpffe aus Pilsfallen.
14. Oscar Born a. Neuhoß-Kuckerneese.
15. Carl Brämer aus Tilsit.
16. Rudolph Barth aus Tilsit.
17. Paul Scher aus Gattrinigteiten.
18. Otto Krantz aus Tilsit.
19. Otto Neßlinger aus Giunken.
20. Albert Kröhnke aus Szirgipönen.
21. Robert Lehmann aus Schafuhnen.
22. Eduard Blum aus Tauroggen.
23. Felix Fürstenberg aus Tilsit.

#### Unter: Prima B.

1. Waldemar Köhler a. Heinrichswalde.
2. Franz Kröfer aus Tilsit.
3. Paul Mer aus Tilsit.
4. Ernst Bahrendorff aus Tilsit.
5. Hugo Kantermann aus Tilsit.
6. Max Herrmann aus Tilsit.
7. Walther Stern aus Tilsit.
8. Max v. Lynder aus Tilsit.
9. Joseph Keneriat aus Budupönen.
10. Richard Kossinna aus Tilsit.
11. Carl Brinkmann aus Karkeln.
12. Louis Busch aus Birkenstrauch.
13. Gustav Blum aus Tilsit.
14. Albert Marthes aus Tilsit.
15. Richard Wilmzig aus Tilsit.
16. Rudolph Zimmel aus Ramanthen.
17. Louis Jagomast aus Tilsit.
18. Max Bendig aus Tilsit.
19. Hugo Dippe aus Tilsit.
20. Hugo Rosenfeld aus Tilsit.

#### Ober: Secunda.

1. Franz Lardon aus Neufkirch.
2. Franz Gide aus Schirwindt.
3. Carl Effert aus Mehlaufen.
4. Paul Mertins aus Tilsit.
5. Richard Hohmann aus Tilsit.
6. Henry Settegast aus Tilsit.
7. Julius Josuweit aus Lubinehlen.
8. Ernst Kaiser aus Galbassen.
9. Bernhard Preid aus Karkeln.
10. Otto Schulz aus Biegelberg.
11. Paul Brange aus Kaufehmen.
12. Robert Hasford aus Pajewon in  
Polen.
13. Wilhelm Diekmann aus Kinten.
14. Willy Hegling aus Schorellen.
15. Arthur Droege aus Tilsit.
16. Richard Rohde aus Rabiau.
17. Paul Bergenroth aus Tilsit.
18. Richard Murray aus Tilsit.
19. Hugo Selchow aus Grüneberg.
20. Franz Bengt aus Degehen.
21. Otto John aus Tilsit.
22. Gasmir Kuwert aus Kaufehmen.
23. Max Waga aus Tilsit.
24. Ernst Post aus Tilsit.
25. Richard Blantenlein aus Ragnit.
26. Walther Radke aus Warsduhnen.
27. Eugen Mack aus Pilsfallen.
28. Paul Schuster aus Tilsit.
29. Fritz Matrocki aus Tilsit.
30. Elmar Spila aus Tilsit.
31. Johannes Weshkalnes aus Uß-  
bördsen.
32. Hermann Urbat aus Alganischken.
33. Kurt Häbler aus Sommerau.

#### Unter: Secunda.

1. Benno Willauer aus Tilsit.
2. Fritz Schulz aus Tilsit.
3. Hermann Möller I. aus Margen.
4. Louis Möller II. aus Margen.
5. Emil Wisjofsky aus Tilsit.
6. Hugo Schilling II. aus Tilsit.
7. Fritz Michalowsky aus Löbau.
8. Felix Schmalz aus Ruffen.
9. Gustav Bauer aus Goadjuthen.
10. Paul Seidenberg aus Tilsit.
11. Theodor Busche aus Tilsit.
12. Fritz Agpobien aus Tilsit.
13. Eduard Ritter aus Wolfswinkel.
14. Bernhard Albath aus Ragaischen.
15. Franz Horn aus Nauffeden.
16. August Regling aus Schorellen.
17. Gustav Kreger aus Tilsit.
18. Louis Schilling aus Tilsit.
19. Eugen Loß aus Tilsit.
20. Hermann Kluth aus Mehlsack.
21. Johannes Andusis aus Culmens-  
Lagallen.
22. Gustav Herford aus Spillen.
23. Franz Saffron a. Delta i. Rußland.
24. Georg Bieser aus Kauten.

25. Walther Schmidske aus Reiben.
26. Hermann Grajczyk aus Insterburg.
27. Carl Fischer aus Tilsit.
28. Ernst Dierroth aus Eichen.
29. Julius Gierke aus Joneitischken.
30. Walther Schupp aus Tilsit.
31. Otto Koch aus Tilsit.
32. Fritz Müller II. a. Kummetschen.
33. Ernst Reiß aus Kaufehmen.
34. Franz Chales aus Tilsit.
35. Carl Lardon aus Kaufehmen.
36. David Taruttis aus Pläschken.
37. August Kurichat aus Dittauen.
38. Emil Müller I. aus Kummetschen.
39. Fritz Reiß II. aus Tilsit.
40. Arthur Lott aus Tilsit.
41. Alfred Ebner aus Tilsit.
42. Hermann Reiß I. aus Tilsit.

#### Ober: Tertia.

1. Christofy Raubfus aus Schudles-  
dimmen.
2. Benjamin Sturmat aus Lindichen.
3. Gustav Kossinna aus Tilsit.
4. Hans Teubner aus Tilsit.
5. Max Schimmelpfennig aus Tilsit.
6. Ernst Schenk II. aus Tilsit.
7. Hermann Mallwig aus Schmale-  
ninken.
8. Hermann Blum a. Georgenburg  
in Rußland.
9. Richard Breuß aus Tilsit.
10. Max Scherwiniski aus Tilsit.
11. Hermann Sell aus Tilsit.
12. Heinrich Schmidt I. aus Tilsit.
13. Wilhelm Greiffenberger a. Pilsfallen.
14. Albert Weshkalnes I. aus Snappen.
15. August Behrendt aus Gassen.
16. Arthur Deutschbein a. Stallupönen.
17. Alexander Nebel aus Silkenhof.
18. Julius Boddy aus Berlin.
19. Hermann Ungefug aus Tilsit.
20. Richard Waga aus Tilsit.
21. Eugen Uhse II. aus Pilsfallen.
22. Paul Just aus Kaufehmen.
23. Alfred Michalowski aus Löbau.
24. Hermann Engelhardt aus Tilsit.
25. Karl Mittelstädt aus Endrupen.
26. Gustav Dressler aus Tilsit.
27. Carl Gäßner aus Bartuketen.
28. Benno Mer aus Tilsit.
29. Adolf Kohnert aus Tilsit.
30. Adolf Jörgens aus Tilsit.
31. Louis Clemens aus Neufkirch.
32. Franz Klotow aus Kargewischken.
33. Hugo Wensat aus Tilsit.
34. Gustav Dippe aus Tilsit.
35. Bruno Spangehl aus Pokraden.
36. Hermann Brozehl a. Nugtkwilken.
37. Carl Gerber aus Tilsit.
38. Alfred Schenk I. aus Tilsit.
39. Joseph Raubschat aus Gr.-Werse-  
ningken.



40. Adolf Schmidt aus Tilsit.
41. Gustav Mauer aus Tilsit.
42. Hans Brelwitz aus Tilsit.
43. Walther Uhse I. aus Pillfallen.
44. Ludwig Buske aus Tilsit-Preußen.
45. Ferdinand Krieger aus Tilsit.
46. Arno de la Chaux aus Tilsit.
47. Adolf Heidenreich aus Lassdinehlen.
48. Herm. Westphalys II. a. Snappen.
49. Richard Voigdt aus Rugen.

#### Unter-Tertia.

1. Ernst Kirchberg aus Tilsit.
2. Meyer Friedeberg aus Tilsit.
3. Georg Volz aus Tilsit.
4. Max Eggert aus Tilsit.
5. Moriz Liebeschütz II. aus Tilsit.
6. Oscar Petrowski aus Tilsit.
7. Franz Settegast aus Tilsit.
8. Julius Liebeschütz I. aus Tilsit.
9. Hermann Gudath aus Plafchen.
10. William Wensch aus Tilsit.
11. Ernst Streichert aus Tilsit.
12. Adolph Haue aus Kobau.
13. August Schwarz aus Neukirch.
14. Theodor Herrendörfer aus Tilsit.
15. William Lebegott aus Tilsit.
16. Richard Hauffmann aus Tilsit.
17. Fritz Wandler aus Karlberg.
18. Ernst Busch aus Birkenstrauch.
19. Hugo Stengel II. aus Gzabienen.
20. Arwed de la Chaux aus Tilsit.
21. August Roskat a. Tilsit-Preußen.
22. Otto Petischull aus Skaisgirren.
23. Richard Haase aus Tilsit.
24. Aenderly Lebius aus Tilsit.
25. Hugo Krantz aus Tilsit.
26. Hermann Wächter aus Tilsit.
27. Wilhelm Schlenzher II. a. Baubeln.
28. Max Liebscher aus Tilsit.
29. Ernst Stengel I. aus Angerapp.
30. Max Schmalz aus Tilsit.
31. Ernst Barkowsky aus Kallucken.
32. Hans Engcke aus Tilsit.
33. Richard Fleischer aus Tilsit.
34. Walther Nach aus Tilsit.
35. Curt Ungefug aus Tilsit.
36. Franz Neßlinger aus Gziunken.
37. Gustav Puzien aus Bogauden.
38. Franz Strulgies aus Tilsit.
39. Georg Schlenzher aus Pakamonen.
40. Ernst Schäling aus Gzieleitschen.
41. Otto Lion aus Goadjuthen.
42. Gust. Wiensfeldt a. Gzameitkehmen.
43. Georg Ungefug aus Darkehmen.
44. Werner Uhse aus Pillfallen.
45. Hugo Hasford aus Pojewon in Polen.
46. Georg Franck aus Tilsit.
47. Fritz Reitmeyer aus Tilsit.
48. Eugen Schöffler aus Tilsit.
49. Georg Sabrowsky aus Karkeln.
50. Gustav Holslein a. Selseningfen.

51. Joseph Riedelsberger aus Hens-
- tischen.
52. Bertram Klösser aus Tilsit.
53. Theodor Löwenberg aus Tilsit.
54. Kurt v. Wendstern aus Tilsit.
55. Hermann Keth aus Göritten.
56. Arthur Selz aus Joneiten.
57. Hermann Hurwitz aus Schirwindt.
58. Max Paulini aus Ueber-Memel.
59. Franz Bartischat aus Tilsit.
60. John Liebeschütz III. aus Tilsit.
61. Fritz Rabke aus Baroduhnen.

#### Ober-Quarta.

1. Max Cohn I. aus Tilsit.
2. Richard Brusdeylins a. Drawshnen.
3. Max Reich aus Tilsit.
4. Martin Barkowsky aus Kallucken.
5. Gustav Wöhlke aus Tilsit.
6. Ernst Bog aus Tilsit.
7. Robert Mittelschütz aus Endrußen.
8. Leovold Stern aus Tilsit.
9. Julius Apstein aus Tilsit.
10. Louis Roskat aus Tilsit-Preußen.
11. Fritz Schrader aus Ruß.
12. Louis Trapp aus Königsberg.
13. Ernst Conrad aus Tilsit.
14. Gustav Rhode aus Grabowen.
15. Hans Keth aus Göritten.
16. Paul Rosenburg aus Tilsit.
17. Max Dorn aus Tilsit.
18. Richard Brämer aus Kallappen.
19. Max Girschfeld aus Kaufehmen.
20. Hans Gamradt aus Enzuhnen.
21. Alfred Holzt aus Tilsit.
22. Curt Koh aus Wallenthal.
23. Curt Nagel aus Tilsit.
24. Hermann Cohn II. aus Tilsit.
25. Siegfried Weinberg aus Tilsit.
26. Emil Deomin aus Tilsit.
27. Ernst Leysche II. aus Labiau.
28. Ernst Marcus aus Tilsit.
29. Richard Zimmermann aus Tilsit.
30. Robert Hurwitz aus Schirwindt.
31. Otto Schmidt I. aus Tilsit.
32. Fritz Reimer aus Schilleninken.
33. Jean Leysche I. aus Mehlaufen.
34. Karl Schmitt II. aus Tilsit.
35. Fritz Engelhardt aus Tilsit.
36. Max Scherwinsky aus Tilsit.
37. Adolph Richter aus Tilsit.
38. Ulrich Schuster II. aus Tilsit.
39. Bernhard Westphal aus Tilsit.
40. Carl Schuster I. aus Tilsit.
41. John Kaapfe aus Meischen.

#### Unter-Quarta.

1. Richard Schwede aus Lumpönen.
2. Wilhelm Stengel aus Popelken.
3. Albert Jacoby aus Tilsit.
4. Oscar Lehmann aus Tilsit.
5. Gustav Jedinat aus Kloten.

6. Richard Habedank aus Tilsit.
7. Jacob Wasbugly aus Tilsit.
8. Adolph Schlenzher a. Kerslupönen.
9. Fritz Brämer aus Tilsit.
10. Gustav Paulini aus Ueber-Memel.
11. Hermann Conrad aus Tilsit.
12. Fritz Gerlach aus Tilsit.
13. Edwin Edelhoff a. Heinrichswalde.
14. Eugen Greiff aus Tilsit.
15. Wilhelm Adomeit aus Lasdnehen.
16. Adolf Klaudat aus Tulpeninken.
17. Jean Stiller aus Bogdahlen.
18. Wilhelm Wartig aus Kraupischken.
19. Emil Hellwich aus Tilsit.
20. Walther Jordan aus Kaufehmen.
21. Georg Vereaur aus Tilsit.
22. Albert Neßlinger aus Gziunken.
23. Ernst Kaufsning aus Tilsit.
24. Bernhard Schmitt aus Heydekzug.
25. Hugo Frieße aus Tilsit.
26. Heinrich Krantz aus Tilsit.
27. Otto Reiss aus Kaufehmen.
28. Arthur Goldbach aus Tilsit.
29. Julius Reitmeyer aus Tilsit.

#### Ober-Quinta.

1. Franz Rademacher aus Winge.
2. Paul Böttcher aus Heinrichswalde.
3. Emil Klotz aus Tilsit.
4. George Jugas aus Sauseningfen.
5. Robert Lubien aus Tilsit.
6. Otto Dirwehlis aus Schönhoff.
7. Carl Haushalter aus Tilsit.
8. Johannes Jäger aus Tilsit.
9. Martin Jordan aus Kaufehmen.
10. Richard Reimer aus Tilsit.
11. Gustav Jäger aus Tilsit.
12. Heinrich Schwarz aus Labiau.
13. Horst Schuster aus Tilsit.
14. Ernst Reimer aus Tilsit.
15. Georg Weiss aus Tilsit.
16. Hermann Schenk aus Tilsit.
17. Max Hensel aus Tilsit.
18. Ernst Gerlach aus Tilsit.
19. Wilhelm Biegandt aus Tilsit.
20. Joseph Haase aus Tilsit.
21. Eugen Brelwitz aus Tilsit.
22. Andreas Hofer aus Lengwethen.
23. Julius Hoffmann a. Schanzekrug.
24. Richard Schwelms aus Brästerort.
25. Otto Zerrath aus Budchlischen.

#### Unter-Quinta.

1. Felix Schiefopp aus Tilsit.
2. Richard Lebius aus Tilsit.
3. Hugo Bernstein a. Ruß. Georgen-
- burg.
4. Otto Kuwert aus Kaufehmen.
5. Max Schulz aus Biegelberg.
6. Ernst Engel aus Tilsit.
7. Max Höler aus Tilsit.
8. Paul Frieße aus Tilsit.
9. Fritz Weidner aus Tilsit.

10. Richard Jäger aus Tilsit.
11. Achilles Blas aus Barten.
12. George Gnabß aus Berlin.
13. Emil Festerling aus Tilsit.
14. Arthur Paulini a. Alt-Jeckherken.
15. Hermann Schlenther aus Pakamonen.
16. Oscar Adomzent aus Kaufmehen.
17. Wilhelm Hartigat aus Tilsit.
18. Ernst Nagel aus Tilsit.
19. Colmar Frischmuth aus Tilsit.
20. Dittmar Marešky aus Tilsit.
21. Oscar Leng aus Tilsit.
22. Franz Haushalter aus Tilsit.
23. Paul Bulbeck aus Tilsit.
24. Moritz Karpes aus Russ.
25. Louis Donſee aus Tilsit.
26. Louis Reitmeyer aus Tilsit.

#### Ober-Sexta.

1. Carl Müller aus Kummetschen.
2. Adolph Möller aus Gr.-Gerhardswalde.
3. Franz Fischer aus Tilsit.
4. Adalbert Großjörge aus Culmen-Rullen.
5. George Macrodi aus Tilsit.
6. Emil Günther aus Tilsit.
7. Max Reimer aus Szillen.
8. Eduard Kleiner aus Saratow in Rußland.
9. Fritz Dröſe aus Tilsit.
10. Ernst Goldbach aus Tilsit.
11. Richard Geiger aus Tilsit.
12. Richard Rademacher a. Kaufmehen.
13. Max Goldbach aus Tilsit.
14. Gustav Henſel aus Tilsit.
15. Richard Häſe aus Tilsit.
16. Paul Muttray aus Tilsit.
17. Franz Verl aus Ragenfang.
18. Hugo Rasmurm aus Ballgarden.
19. Carl Buscke aus Tilsit.
20. Harry Hartog aus Labiau.
21. Louis Wittenberg aus Tilsit.
22. Hugo Gnabß aus Berlin.
23. Heinrich Gennies aus Stollbeck.
24. Carl Ander aus Kleinlauden.
25. Arthur Hartog aus Labiau.
26. Reinhold Mogk aus Tilsit.
27. Max Josupeit aus Tilsit.
28. Hermann Neßlinger aus Gjunken.
29. Hermann Kranz aus Penſoniſchen.
30. Otto Boy aus Szillen.

#### Unter-Sexta.

1. Ernst Leubner aus Tilsit.
2. Ernst Weckbach aus Tilsit.
3. Walther Gerlach aus Tilsit.
4. Curt Schlenther aus Kerſupönen.
5. Friedr. Penschud a. Schakeningen.
6. David Kairies aus Prussellen.
7. Max v. Hauenschild aus Tilsit.
8. Carl Apstein aus Tilsit.
9. Ernst Suffert aus Tilsit.
10. Fritz Hogroſe aus Tilsit.
11. Ernst Hudwech aus Sedwilleiten.
12. Egon Müller aus Wieſen.
13. Heinrich Wander aus Karberg.
14. Hugo Stern aus Tilsit.
15. Max Müller aus Tilsit.
16. Paul Nahm aus Polompen.
17. Paul Kiewewetter aus Tilsit.
18. Emil Behrendt aus Tilsit.
19. Paul Dröſe aus Tilsit.
20. Eugen Gocke aus Tilsit.

### Vorbereitungsschule.

#### 1. Klasse.

1. Anton Denzer aus Tilsit.
2. Wilhelm Schmitt aus Heydefrug.
3. Reinhard Schmitt aus Heydefrug.
4. Richard Bauer aus Tilsit.
5. Walther Lebius aus Tilsit.
6. Ewald Griegoleit aus Waltruſchfehen.
7. Bernhard Liebſcher aus Tilsit.
8. Alfred Klog aus Tilsit.
9. Florian Schlenther a. Pakamonen.
10. Emil Schüz aus Tilsit.
11. Raphael Friedeberg aus Tilsit.
12. Conr. Schawaller a. Dörſchfehen.
13. Oscar Jäger aus Tilsit.
14. Walther Wenskat aus Tilsit.
15. Alfred Dürholz aus Kowno.
16. Paul Laubies aus Tilsit.
17. Richard Josupeit aus Tilsit.
18. Louis Sklower aus Tilsit.
19. Richard Goldbach aus Tilsit.
20. Erich Mogk aus Tilsit.
21. Walther Rhode aus Grabowen.
22. Henry Glaſer aus London.
23. Otto Dickhäuſer aus Ruckerneſe.
24. Curt Fiſcher aus Tilsit.
25. Fritz Ehleben aus Tilsit.

26. Max Wiener aus Tilsit.
27. Alfred Möring aus Tilsit.
28. Louis Wiſoſki aus Ruß.
29. Franz Laubenschmidt aus Tilsit.
30. Wilhelm Leng aus Tilsit.
31. Carl Köſler aus Tilsit.
32. Louis Paulini aus Alt-Jeckherken.
33. Walther Breßwig aus Tilsit.
34. Richard Henſel aus Tilsit.
35. Robert Lange aus Tilsit.

#### 2. Klasse.

1. Emil Pichler aus Wickbold.
2. Albert Pichler aus Wickbold.
3. Benno Häſe aus Tilsit.
4. George Suffert aus Tilsit.
5. Max Urbahn aus Tilsit.
6. Theophil Meyer aus Tilsit.
7. Hans Wachhausen aus Tilsit.
8. Paul Falke aus Tilsit.
9. Hans v. Polenz aus Tilsit.
10. Otto Regling aus Schorellen.
11. Ferdinand Gämmerer aus Tilsit.
12. Eugen Paulini aus Ueber-Memel.
13. John Leſſing aus Tilsit.
14. Fritz Weckbach aus Tilsit.
15. Ernst Kiewewetter aus Tilsit.
16. Emil Frank aus Tilsit.
17. Franz Krah aus Tilsit.

#### 3. Klasse.

1. Paul Lehmann aus Tilsit.
2. Carl Nawrath aus Königsberg.
3. Richard Hädel aus Tilsit.
4. Max Neßlinger aus Gjunken.
5. Carl Weichert aus Tilsit.
6. Richard Gigner aus Gjurellen.
7. Max Wadbugki aus Tilsit.
8. Gotthold Weider aus Tilsit.
9. Paul Janſon aus Tilsit.
10. Rudolph Donath aus Tilsit.
11. Otto Schmidt aus Tilsit.
12. Wilhelm Wachhausen aus Tilsit.
13. Paul Hundrieſer aus Tilsit.
14. John Stern aus Tilsit.
15. Richard Liebſcher aus Tilsit.
16. Franz Richter aus Tilsit.
17. Franz Weſtphal aus Tilsit.
18. Bernhard Weider aus Tilsit.
19. Hermann Stumm aus Tilsit.
20. Arthur Bauer aus Tilsit.
21. Paul Heinrich aus Tilsit.



# Tabellarische Uebersicht der unter die einzelnen Lehrer vertheilten Sectionen seit dem 7. September 1871.

— 49 —

Namen der Lehrer.	Gymnasium.										Vorlesung.			Summe der wöchentlich. Stunden
	D. I.	u. I. A. u. B.	D. II.	u. II.	D. III.	u. III.	D. IV.	u. IV.	D. V. u. u. V.	D. VI. u. VI.	I.	II.	III.	
1) Prof. Rabian, Direktor, Ordinarius v. D. I.	2 Homer 8 Latein				2 Homer 1 Singen I.—VI.									13
2) Dr. Kossinna, 1. Oberl., Ordin. v. II. III.	6 Griech.				2 Griech. 2 Geogr.	8 Latein								18
3) Pöhlmann, 2. Oberlehrer, Ordin. v. II. I. a. u. b.	6 Latein	6 Griech.	8 Latein	2 Virgil										22
4) Meckbach, 3. Oberl., Ordin. v. D. II.			6 Griech.	2 Homer 2 Dicht. 8 Latein	2 Virgil			3 Math.						23
5) Schielepp, 4. Oberlehrer.	2 Relig. 2 Hebräisch	2 Relig.	2 Relig.	2 Relig. 2 Dicht. 2 Griech.	2 Relig. 2 Dicht.	2 Relig.	2 Relig.							22
6) Strodtzki, 1. ordentlicher Lehrer, Ordin. v. II. II.	3 Dicht.	2 Dicht. 1 Deutsch		8 Latein.	6 Latein.									22
7) Dr. Fischer, 2. ordentlicher Lehrer, Ordin. v. D. III.	2 Franz. 3 Griech. 3 Geogr.	2 Franz. 2 Franz. 3 Griech. 3 Geogr.	2 Franz. 3 Griech. 3 Geogr.	2 Franz. 3 Griech. 3 Geogr.	2 Franz. 3 Griech. 3 Geogr.									24
8) Dedit, 3. ordentlicher Lehrer,			4 Griech.	6 Griech.	4 Griech. 4 Latein Geogr.									22
9) Milinowski, 4. ordentlicher Lehrer.	4 Math. 2 Phys.	4 Math. 1 Phys.		4 Math. 1 Phys.										22
10) Plew, 6. ordentlicher Lehrer, Ordin. v. D. IV.					2 Franz. 6 Griech. 2 Dicht.	8 Latein		2 Geographie.						22
11) Gabn, 6. ordentlicher Lehrer, Ordin. v. D. VI.				2 Dicht.	2 Dicht. 6 Griech. 3 Geogr.			7 Latein 2 Latein						22
12) Kowonakki, 7. ordentlicher Lehrer, Ordin. v. II. IV.					2 Franz. 2 Dicht.	6 Griech. 10 Latein								22
13) Gisevius, ord. Lehrer u. Kanzen-Schiff.				4 Vortausch I.—IV.			2 Relig.	3 Bibl. Gesch. 6 Latein			3 Bibl. Gesch.			21
14) Rehberg, Schreib- u. Buchenlehrer.		2 Rechnen I.—III.			2 Schreiben III.—IV. 2 Rechnen.		2 Rechnen. 2 Schreiben	2 Rechnen. 2 Schreiben			4 Schreiben			24
15) Collin, Cantor u. Gesangslehrer.		2 Singen I.—VI.			2 Singen III. u. IV.		2 Singen							8
16) Dr. Haase, Probe-Kandidat und 1. hessischer Hilfslehrer.					1 Geogr. 2 Phädr. 2 Griech.		2 Deutsch 2 Franz. 10 Latein							21
17) Reuter, Probe-Kandidat und 2. hessischer Hilfslehrer.		4 Math.			4 Math. 4 Math. 3 Math.			2 Naturgesch.						23
18) Kleinschmidt, 1. Lehrer der Vorlesung, Ordin. v. II. VI. u. D. I.							4 Deutsch 4 Rechnen 2 Dicht.				6 Rechnen 4 Rechnen 4 Deutsch 2 Dicht. 1 Singen	3 Relig. 6 Rechnen 4 Rechnen 1 Dichtung. 2 Deutsch	2 Relig. 6 Rechnen 4 Rechnen 4 Schreiben	27
19) Soldmann, 2. Lehrer der Vorlesung u. Ordin. v. II. u. III.														32

Anm.: Die oben angegebene Vertheilung der Sectionen gilt nur für September bis Ende Dezember 1871. Im I. Quartal 1872 mußten wegen der Vertretung des Oberlehrers Pöhlmann durch die Lehrer mehrere Veränderungen bei der Vertheilung der Sectionen vorgenommen werden.





# Uebersicht

der

**Prüfung u. der Versuche im mündlichen Vortrage  
und im vierstimmigen Gesange.**

**Donnerstag den 21. März Vormittag von 8—1 Uhr.**

## Choral.

Vorschule III. Buchstabiren und Lesen Tolckmitt. III. Rechnen . . . Tolckmitt.  
II. Lesen . . . . . Tolckmitt. Rechnen . . . Tolckmitt.  
I. Deutsch . . . . . Kleinschmidt. I. u. II. Singen . . Kleinschmidt.

Rudolph Donath: Der angehende Schüler. — Paul Falke: Der Jäger und der Fuchs. — Hans  
Wachhausen: Der Faule. — Richard Bauer: Der Knabe und die Datteln. — Anton Denzer: Der Rabe  
und der Fuchs.

Gymnasium: D.u.U. VI. Rechnen Kleinschmidt. D.u.U. VI. Naturbeschreibung Reuter.  
V. AB. Latein . . Haase. V. AB. Geographie . . . . . Kownakli.  
U. IV. Geschichte Haase. U. IV. Latein . . . . . Kownakli.  
D. IV. Geogr. . . Hahn. D. IV. Mathematik . . . . . Reuter.  
U. III. Griechisch. Plew. U. III. Religion . . . . . Schiekopp.  
D. III. Französisch Fischer. D. III. Deutsch . . . . . Hahn.

Friedrich Penschud: Die Finger. — Paul Riesewetter: Der Reisende. — Emil Günther: Die  
Zwerge. — Richard Häse: Die Freunde. — Johannes Jäger: Germanicus im Teutoburger Walde. — Louis  
Trapp: Viatores et latro. — Gustav Gedinat: Die Eichenfaat. — Fritz Gerlach: Otto I. und Heinrich. —  
Alfred Holz: Der deutsche Ritter. — Ernst Marcus: Hans Euler. — Bertram Glöcker: Das Ein-  
genthal. — Julius Liebschütz: Sommerabend auf Kloster Forch. — August Rosikat: Odyss. II, 1—23. —  
William Lebegott: Ovid. III, 1—23. — Ernst Streichert: Coreley. — Werner Uhse: Das Glück von  
Edenhall. — Richard Boigdt: Der Blumen Rache. — Max Schimmelpfennig: Odyss. 16, 418—439. —  
Julius Bodky: Le Nid.

**Gesang:** Chor von Rind: „Der Einzige, der Allen Alles ist.“ Chor von Mühling: „Die  
Ehre des Herrn ist ewig“.

**Donnerstag Nachmittag von 3 bis 5<sup>1</sup>/<sub>2</sub> Uhr.**

U. II. Mathematik . . . Milinowski. U. II. Latein . . . . . Skrodzki.  
D. II. Religion . . . . . Schiekopp. D. II. Latein . . . . . Meckbach.  
U. I. A. B. Geschichte . . Fischer. U. I. A. B. Homer . . . Meckbach.

Der Unterprimaner Georg Peters spricht französisch über das Thema: Prise de Jérusalem par les  
Croisés (c. A.).

D. I. Griechisch . . . . . Kossinna. D. I. Horaz . . . . . Fabian.

Der Oberprimaner Hermann Schulz spricht lateinisch über das Thema: Horatium esse optimum patriae  
amoris magistrum.

Der Oberprimaner Julius Herrendörfer beantwortet die Frage: Welche Menschen verdienen den Ehren-  
namen — Wohltäter der Menschheit?

## Gesang mit Instrumental-Begleitung.

Gehöre aus Mozart's Requiem: „Dies irae. — Rex tremendae majestatis. — Confu-  
tatis maledictis. — Lacrimosa dies illa. — Sanctus Dominus cum Osanna in excelsis.“

**Choral.**



# Freitag den 22. März Vormittag 11 Uhr.

## Choral u. Gebet.

Festrede: Herr Oberlehrer Schiekopp.

Gesang: „Salvum fac regem Domine.“

### Dann deklamiren:

Gotthold Meißner . . . . .	(B. S. III.):	Der Storch und die Kinder.
Max Wasbuszki . . . . .	(B. S. III.):	Gelübde.
Eugen Paulini . . . . .	(B. S. II.):	Das Kunststück.
Raphael Friedberg . . . . .	(B. S. I.):	Deutschland hoch!
Louis Sklower . . . . .	(B. S. I.):	Der alte Fritz auf Sanssouci.
Ernst Leubner . . . . .	(II. VI.):	Der reichste Fürst.
Max Müller . . . . .	(II. VI.):	Belle Alliance.
Max Josupeit . . . . .	(D. VI.):	Ziethen.
Paul Nuttray . . . . .	(D. VI.):	Marshall Derfflinger.
Carl Haushalter . . . . .	(V.):	Ein Heldentod.
Heinrich Schwarz . . . . .	(V.):	Gott mit uns.
Hermann Schend . . . . .	(V.):	Dem Könige Wilhelm.
Hugo Frieße . . . . .	(II. IV.):	Die Leipziger Schlacht.
Richard Brämer . . . . .	(D. IV.):	Der Husar.
Max Dorn . . . . .	(D. IV.):	Landwehrlied.
Kurt Nagel . . . . .	(D. IV.):	Emmanuel Froben.
Richard Hausmann . . . . .	(II. III.):	Deutschlands Wächter.
Theodor Herrendorfer . . . . .	(II. III.):	Der Mann.
Richard Haase . . . . .	(II. III.):	Die Straßburger Fanne.
Ernst Schmitt . . . . .	(D. III.):	Kaiser von Deutschland.

Der Unterprimaner Georg Hoffheinz spricht über die Weihe, welche die Poesie den deutschen Freiheitskriegen gegeben habe.

## Lebe hoch.

### Heil Dir im Siegerkranz.

Heil Dir im Siegerkranz,  
Herrscher des Vaterlands,  
Heil, König, Dir!  
Fühl' in des Thrones Glanz  
Die hohe Wonne ganz:  
Liebling des Volks zu sein,  
Heil, Herrscher, Dir!  
  
Nicht Noß, nicht Reifige,  
Sichern die steile Höh',  
Wo Fürsten nehn;  
Liebe des Vaterlands,  
Liebe des freien Mann's  
Gründen den Herrscher-Thron,  
Wie Fels im Meer.  
  
Heilige Flamme, glüh',  
Glüh' und verlösche nie  
Für's Vaterland!

Wir Alle stehen dann  
Muthig für Einen Mann,  
Kämpfen und bluten gern  
Für Thron und Reich.  
Handlung und Wissenschaft  
Heben mit Muth und Kraft  
Ihr Haupt empor!  
Krieger und Heldenthat  
Finden ihr Vorbeerblatt  
Freu aufgehoben dort  
An Deinem Thron.  
Sei, König Wilhelm, hier  
Lange des Volkes Zier,  
Der Menschheit Stolz!  
Fühl' in des Thrones Glanz  
Die hohe Wonne ganz:  
Liebling des Volks zu sein,  
Heil, König, Dir!

## Entlassung der Abiturienten.

Gesang mit Orchester-Begleitung.

Introductions-Chor „Schön glänzt die goldene Sonne“ aus der Oper: Das unterbrochene Opferfest, von Winter. — Chor aus der Oper Wilhelm Tell, von Rossini. „Tag der Wonne“!

Nach Austheilung der vierteljährlichen Zeugnisse und Bekanntmachung der Versetzung wird die Schule heute geschlossen und beginnt wieder Montag den 8. April Morgens 8 Uhr, die Vorschule um 9 Uhr.

Tilsit, den 22. März 1872.

Fabian.